




OTTO HARRASSOWIT
BUCHHANDLUNG



DER ZAHLBEGRIFF SEIT GAUSS

EINE ERKENNTNISTHEORETISCHE UNTERSUCHUNG

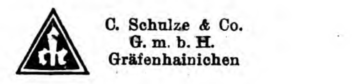
VON

Dr GERHARD STAMMLER
PRIVATDOZENT DER PHILOSOPHIE
AN DER UNIVERSITÄT HALLE

Vivere non necesse est,
numerare necesse.



MAX NIEMEYER / VERLAG / HALLE/SAALE / 1926


C. Schulze & Co.
G. m. b. H.
Gräfenhainichen

Meinen lieben Eltern.



Inhalt.

Schrifttum.

In dieses Verzeichnis sind nur die Schriften aufgenommen worden, die in vorstehender Abhandlung ausdrücklich erwähnt worden sind. — L. = Leipzig; B. = Berlin; P. = Paris.

Die Verweise auf Schriften geschehen durch Angabe des Verfassers, des — abgekürzten — Titels, sowie der Nummer des Schriftenverzeichnisses. — Verweisungen auf Stellen der vorliegenden Abhandlung sind durch ein hinzugefügtes „d. A." gekennzeichnet.

Abkürzungen für Zeitschriften und Sammelwerke.

AMP = Archiv für Mathematik und Physik.
DMV = Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
EMW = Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Deutsche Ausgabe).
GGA = Göttingische Gelehrte Anzeigen.
GN = Nachrichten der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften und der Kön. Georg-August-Universität zu Göttingen.
JRAM = Journal für die reine und angewandte Mathematik.
KS = Kant-Studien.
MA = Mathematische Annalen.
PV = Philosophische Vorträge, veröffentlicht von der Kant-Gesellschaft.
ZM = Zeitschrift für Mathematik.

---

(1) ARGAND, Jean Robert: *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* 2. Ausgabe mit Vorrede von J. HOUEL. P. 1874.

(2) BERKELEY, George: *The Principles of Human Knowledge.* — Bibliotheca philosophorum. V. L. 1913.

(3) BERNSTEIN, Felix: *Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus.* — DMV 28 1919 S. 63—78.

(4) BIEBERBACH, Ludwig: *Zur Theorie der komplexen Zahlen.* — ZM 2 1918 S. 171—179.

(5) BIERMANN, Otto: *Theorie der analytischen Funktionen.* — L. 1887.

(6) BRAND, C.: *Grundriß der Differentialrechnung.* — B. 1875.

(7) BROUWER, L. E. J.: *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz des ausgeschlossenen Dritten.* I. II. — Verh. d. K. Ak. van Wetensch. Amsterdam 1918, 1919.

(8) BROUWER, L. E. J.: *Intuitionistische Mengenlehre.* — DMV 28 1919 S. 203—208.

(9) BROUWER, L. E. J.: *Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?* — MA 83 1921 S. 201—210.

(10) BROUWER, L. E. J.: *Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz des ausgeschlossenen Dritten.* — Verh. d. K. Ak. van Wetensch. Amsterdam 1923.

(11) BURKHARDT, Heinrich: *Algebraische Analysis.* — L. 1903.

(12) BURKHARDT, Heinrich: *Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung der Naturerscheinungen.* — L. 1907.

(13) CANTOR, Georg: *Bemerkung zu dem Aufsatz: Zur Weierstraß'-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen.* — MA 33 1889 S. 476.

(14) CANTOR, Georg: *Beiträge zur Begründung einer transfiniten Mengenlehre* I. — MA 46 1895 S. 481—512.

(15) CESARO, Ernesto: *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung.* Deutsch von Gerhard Kowalewski. — L. 1904.

(16) COHEN, Hermann: *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte.* — B. 1883.

(17) v DANTSCHER, Victor: *Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen.* — L.-B. 1908.

(18) DEDEKIND, Richard: *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* — Braunschweig (1872), 4. Aufl. 1912.

(19) DEDEKIND, Richard: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten zusammengesetzten komplexen Größen.* — GN 1885 S. 141 bis 159.

(20) DEDEKIND, Richard: *Erläuterungen zur Theorie der sogenannten allgemeinen komplexen Größen.* — GN 1887 S. 1—7.

(21) DEDEKIND, Richard: *Was sind und was sollen die Zahlen?* — Braunschweig (1887), 4. Aufl. 1918.

(22) DINGLER, Hugo: *Zur Methodik in der Ma hematik.* – DMV 14 1905 S. 581—584.

(23) DINGLER, Hugo: *Über die logischen Paradoxieen der Mengenlehre und eine paradoxieenfreie Mengendefinition.* — DMV 22 1913 S. 307—315.

(24) DINGLER, Hugo: *Über eine axiomatische Grundlegung der Lehre vom Ding.* — DMV. 28 1919 S. 138—158.

(25) DINI, Ulisse: *Grundlagen für die Theorie der Funktionen einer reellen veränderlichen Größe.* Deutsch von Adolf Schepp und Jacob Lüroth. — L. 1892.

(26) DURÈGE, H.: *Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* — 3. Aufl. L. 1882.

(27) EULER, Leonhard: *Vollständige Anleitung zur Algebra.* — *Reclam.*

(28) FRÄNKEL, A.: *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre.* — MA 86 1922 S. 230—237.

(29) FREGE, Gott ob: *Die Grundlagen der Arithmetik.* — Breslau 1884.

(30) FREYER, *Studien zur Metaphysik der Differentialrechnung.* — Progr. (Nr. 284), Klosterschule Ilfeld 1883.

(31) GAUSS, Carl Friedrich: *Zur Erinnerung an Sertorius von Waltershausen.* — L. 1856.

(32) GAUSS, Carl Friedrich: *Werke.* Herausg. von d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. — 1870—1906.

(32a) GEIGER, Moritz: *Systematische Axiomatik der Euklidischen Geometrie.* — Augsburg 1924.

(33) GRASSMANN, Hermann: *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik.* — L. 1844. (Zit. als A_1).

(34) GRASSMANN, Hermann: *Die Ausdehnungslehre ...* — B. 1862. (A_2) (33) und (34) sind in den *Gesammelten mathematischen und physikalischen Abhandlungen* von GRASSMANN in I, 1 und I, 2 erschienen. — L. 1894, 1896.

(35) HAMILTON, William Rowan: *Lectures on Quaternions.* — 1853.

(36) HANKEL, Hermann: *Vor esungen über die komplexen Zahlen und ihre Funktionen. I.: Theorie der komplexen Zahlensysteme, insbesondere ...* — L. 1867.

(37) HANKEL, Hermann: *Die Elemente der projektivischen Geometrie in systematischer Behandlung.* — L. 1875.

(38) HAUSDORFF, Felix: *Grundzüge der Mengenlehre.* — L. 1914.

(39) HEINE, E.: *Die Elemente der Funktionentheorie.* — JRAM 74 1872 S. 172—188.

(40) HESSENBERG, Gerhard: *Grundbegriffe der Mengenlehre.* — Abhandl. d. Fries'schen Schule. Neue Folge, 4. Heft S. 479—706. Göttingen 1906.

(41) HILBERT, David: *Grundlagen der Geometrie.* — 15. Aufl. L. 1922.

(42) HILBERT, DAVID: *Über die Grundlagen der Geometrie.* — GN. 1902 S. 231—241.

(43) HILBERT, David: *Über den Zahlbegriff.* — DMV 8 1909 S. 180 bis 184.

(44) HILBERT, David: *Grundlagen der Physik* I. — GN 1915 S. 395—407.

(45) HILBERT, David: *Axiomatisches Denken.* — MA 78 1918 S. 405—415.

(46) HILBERT, David: *Neubegründung der Mathematik* I. — Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ. Bd. 1, Heft 2 S. 157—177. Hamburg 1922.

(47) HILBERT, David: *Über die logischen Grundlagen der Mathematik.* — MA. 88 1923 S. 151—165.

(48) HÖLDER, O.: *Bemerkung zu der Mitteilung des Herrn Weierstraß: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen.* — GN. 1886 S. 241—244.

(49) HÖLDER, O.: *Bemerkung zur Quaternionentheorie.* GN. 1889 S. 34—39.

(50) HOÜEL, J.: *Théorie élémentaire des quantités complexes.* — P. 1867—74·

(51) HOÜEL, J.: *Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes.* — Journal de mathémat ques élémentaires. 1 1877.

(52) HOÜEL, J.: *Cours de calcul infinitésimal.* I. — P. 1878 (1871).

(53) ILLIGENS, Eberhard: *Zur Weierstraß-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen.* — MA. 33 1889 S. 155—160.

(54) ILLIGENS, Eberhard: *Zur Definition der Irrationalzahlen.* MA. 35 1890 S. 451—455.

(55) KANT, Immanuel: *Kritik der reinen Vernunft.* — 2. Aufl. Riga 1787.

(56) KLEIN, Felix: *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* — GN. 1871 S. 419—434.

(57) KLEIN, Felix: *Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie.* — GN. 1872 S. 373—379.

(58) KLEIN, Felix: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* — Erlangen 1872.

(59) KNOPP, Konrad: *Funktionentheorie.* — B.-L. 1913.

(60) KÖNIG, J.: *Zum Kontinuumproblem.* — MA. 60 1905 S. 177—180.

(61) KÖNIG, Julius: *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre.* — L. 1914.

(62) KORSELT, A.: *Paradoxieen der Mengenlehre.* — DMV. 15 1906 S. 215—219.

(63) KOSSAK, E.: *Die Elemente der Arithmetik.* — Progr. Fr. Werdersches Gymnasium. B. 1872.

(64) KOWALEWSKI, Gerhard: *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung.* L.-B. 1909.

(65) KOWALEWSKI, Gerhard: *Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen.* — L. 1911.

(66) LIPSCHITZ, R.: *Mitteilungen bei Gelegenheit der Herausgabe seines Lehrbuches der Analysis.* — GN. 1880 S. 589—594.

(67) LOEWY, Alfred: *Axiomatische Begründung der Zinstheorie.* — DMV. 28 1919 S. 26—31.

(68) LÜROTH, J.: *Über das Rechnen mit Würfen.* — GN. 1873 S. 767—779.

(69) v. MANGOLDT, Hans: *Einführung in die höhere Mathematik.* I. — 3. Aufl. L. 1921.

(70) MANSION, P.: *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand.* I. — P. 1887.

(71) MEINECKE, Wilhelm: *Die Bedeutung der Nicht-Euklidischen Geometrie in ihrem Verhältnis zu Kants Theorie der mathematischen Erkenntnis.* — KS. 11 1906 S. 209—232.

(72) MOLLERUP, Johannes: *Die Definition des Mengenbegriffes.* — MA. 64 1907 S. 231—238.

(73) NATORP, Paul: *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.* L.-B. 1910.

(74) NETTO, Eugen: *Vorlesungen über Algebra* L. 1896.

(75) PASCH, Moritz: *Über die Einführung des Imaginären.* — AMP. (*3*) 7 1904 S. 102—108.

(Von uns in der Form zitiert, die es als Anhang zu [78] erhalten hat.)

(76) PASCH, Moritz: *Grundlagen der Analysis.* — L.-B. 1909.

(77) PASCH, Moritz: *Über die Einführung der irrationalen Zahlen.* — MA. 40 1892 S. 149—152.

(78) PASCH, Moritz: *Veränderliche und Funktion.* — L.-B. 1914.

(79 PASCH, Moritz: *Der Ursprung des Zahlbegriffs.* — I. AMP. 28 1920 S. 17—33. — II. ZM. 10 1921 S. 124—134.

(80) PETERSEN, Julius: *Über* n-*dimensionale komplexe Zahlen.* — GN 1887 S. 489—502.

(81) POINCARÉ, Henri: *Wissenschaft und Methode.* Deutsch von F. und L. Lindemann. — L.-B. 1914.

(82) PRICE Bartholomew: *A Treatise on Infinitesimal Calculus* I. – Oxford 1852.

(83) PRINGSHEIM, Alfred: *Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht.* — DMV. 6 1897 S. 73—83.

(84) PRINGSHEIM, Alfred: *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre.* I. — L.-B. 1916, 1921.

(85) REICHEL, Otto: *Die Grund agen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe* I. II. — B. 1886, 1890.

(86) SCHIMMACK, Rudolf: *Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition.* — GN. 1903 S. 317.

(87) SCHNUSE: *Rezension von Oskar Schlömilch: Kompendium der höheren Analysis* (Braunschweig 1853). — GGA. 1854. S. 1204—1228.

(88) SCHNUSE: *Rezension von Edmund Külp*: Die Differential- und *Integralrechnung* ... (Darmstadt 1854). — GGA. 1854 S. 761—768.

(89) SCHOENFLIES, A.: *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* I. II. — DMV. 8 2. Ergbd. 1900, 1908.

(90) SCHOENFLIES, A.: *Über die geometrischen Invarianten der analysis situs.* — GN. 1904 S. 514—525.

(91) SCHOENFLIES, A.: *Über wohlgeordnete Mengen.* — MA. 60 1905 S. 181—186.

(92) SCHOENFLIES, A. *Paradoxieen der Mengenlehre.* — DMV. 15 1906 S. 19—25.

(93) SCHOENFLIES, A.: *Die Stellung der Definition in der Axiomatik.* — DMV. 20 1911 S. 222—235.

(94) SCHOENFLIES, A.: *Zur Grundlegung der Mengenlehre.* — MA. 72 1912 S. 551—561.

(95) SCHOENFLIES, A.: *Die Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen.* — L.-B. 1913.

(96) SCHÖNFLIES, A.: *Axiomatik der Mengenlehre.* — MA. 83 1921 S. 171—200.

(97) SCHRÖDER, E.: *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* I. — L. 1873.

(98) SCHUBERT, H.: *Grundlagen der Arithmetik.* — EMW. I A 1 1898.

(99) SERRET, J. A.: *Handbuch der höheren Algebra.* Deutsch bearb. von G. Wertheim. — L. 1868.

(100) SPITZ, Carl: *Erster Kursus der Differential- und Integralrechnung.* — L.-Heidelberg 1871.

(101) v. STAUT, Georg Christian: *Beiträge zur Geometrie der Lage.* Nürnberg 1856—1860.

(102) STOLZ, Otto: *Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie.* — NA. 4 1871 S. 416—441.

(103) STOLZ, Otto: *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.* — L. 1885—86.

(104) STOLZ, Otto und GMEINER, J. A.: *Theoretische Arithmetik.* — L. 1900.

(105) STUDY, E.: *Über Systeme von komplexen Zahlen.* — GN. 1889 S. 237ff.

(106) STUDY, E.: *Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen.* — EMW. I A 4 1898.

(107) TAIT, P. G. and KELLIAND, P.: *Introduction to Quaternions with numerous exemples.* - London 1873.

(108) TAIT, P. G.: *An elementary Treatise on Quaternions.* — 3. Aufl. Cambridge 1890.

(109) THOMAE, Johannes: *Abriß einer Theorie der komplexen Funktionen und der Transformationen einer Veränderlichen.* — Halle 1870 (3. veränd. Aufl. 1890).

(110) THOMAE, Johannes: *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.* — Halle 1875.

(111) VOSS A.: *Über das Wesen der Mathematik.* — 3. Aufl. 1922.

(112) WEBER, Heinrich und WELLSTEIN, Josef: *Enzyklopädie der Elementarma hematik.* I. — 3. Aufl. L. 1909.

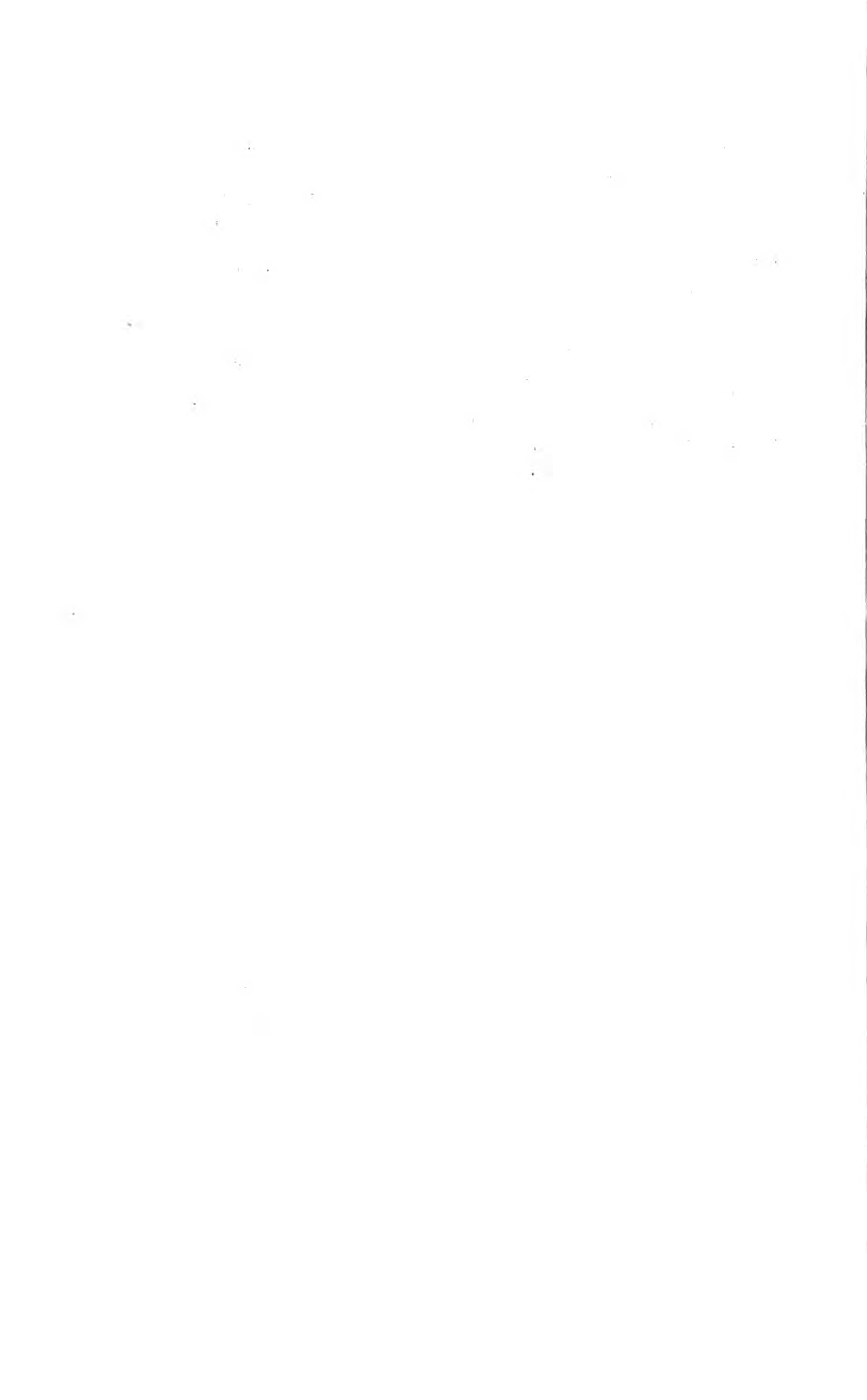
(113) WEIERSTRASS, Karl: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen.* (Mit einer Zusatzbemerkung von H. A. Schwarz.) — GN. 1884 S. 395—419.

(114) WEYL, Hermann: *Das Kontinuum.* — L. 1918.

(115) WILLIAMSON, Benjamin: *An elementary Treatise in the Differential-Calculus* ... — London 1880.

(116) ZERMELO, E.: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.* — MA. 65 1908 S. 261—281.

(117) ZIEHEN, Theodor: *Das Verhältnis der Logik zur Mengenlehre.* — PV. 16 B. 1917.



Vorwort.

Das vorliegende Werk stellt sich die Aufgabe, durch eine gesicherte Methode die letzten Elemente des Zahlbegriffes aufzusuchen, so wie er der neueren Mathematik eignet.

Demgemäß behandelt das erste Kapitel die methodischen Grundlagen. Eine Auseinandersetzung mit philosophischen Gedankengängen Anderer (etwa CASSIRER, HÖNIGSWALD, HUSSERL, LIPPS, NATORP, VAIHINGER) ist der Geschlossenheit der Darstellung halber vermieden.

Im zweiten Kapitel werden mathematische Untersuchungen der letzten Jahrzehnte über die Grundlagen der Zahlenlehre besprochen. Als Vorbild schwebten uns hierbei die Ausführungen FREGE'S in dessen „Grundlagen der Arithmetik" vor. Namentlich seine Bevorzugung der sachlichen vor der historischen Anordnung des Stoffes diente uns als Präzedenzfall.

Das dritte Kapitel versucht, das aus der mathematischen Analyse gewonnene Material in die zu Anfang vorgetragenen methodischen Grundgedanken einzuarbeiten.



1. Kapitel.

Methodik.

A. Ausgangspunkt.

§ 1. Einführung.

Der Problemkreis, in den wir im folgenden eintreten, bietet eine der merkwürdigsten Konstellationen in der Geschichte der Wissenschaft dar.

Man hat, nicht mit Unrecht, das 19. Jahrhundert das Jahrhundert der „naturwissenschaftlichen Eroberung der Welt“ genannt. Und in der Tat waren ja die Fortschritte der Physik und der anderen naturwissenschaftlichen Disziplinen ungewöhnlich große. Aber damit nicht genug! Die naturwissenschaftliche Denkweise verbreitete sich überallhin und in alle Gebiete. In Ethik, Geschichte, Soziologie griff sie ein; ja selbst vor der Gottesverehrung machte sie nicht Halt, sondern beanspruchte auch hier den ersten Platz. Allerdings waren die dabei gezeitigten Erfolge oft sehr fragwürdiger und meist mehr zerstörender als schöpferischer Art. Noch ist nicht abzusehen, ob diese Art des Denkens — namentlich in der „populären“ Literatur — alle ihre Kräfte erschöpft hat, ob das „naturwissenschaftliche Weltgefühl“ wirklich zur Rüste gegangen ist und nicht noch — versteckt manchmal — weiterwuchert. Nur soviel dürfte festzustellen sein, daß das breite Interesse an den von der forschenden Naturwissenschaft zutage geförderten positiven Daten bedeutend abgenommen hat — im Vergleich etwa zur Mitte der 90er Jahre des 19. Jahrhunderts.

Aber immer noch gilt nach wie vor die Naturwissenschaft und ihre „Hilfswissenschaft“, die Mathematik, in weiten Kreisen als die exakte Wissenschaft, und ihre Grundsätze genießen ehrfürchtig bestaunte Unantastbarkeit.

Und demgegenüber sieht der in der Geschichte der Mathematik Forschende (wovon wir hier handeln wollen), daß gerade in der Zeit, da die andächtigste Verehrung dieser Wissenschaft gezollt wird, eine Krisis nach der anderen von bedeutenden Forschern festgestellt wird. Nimmer Ruhe noch Rast findet der nach Sicherheit und endgültig letzter Entscheidung und Einsicht Suchende. Überall stehen in den Grundlagen Fragezeichen, Zweifel, ungelöste Probleme. Man sollte meinen, daß alle Arbeit auf dem Gerüste ruhen würde, bei solcher Unsicherheit in der Unterlage.

Aber wiederum sehen wir gerade das Gegenteil! Unverdrossen bauen rüstige Hände weiter an dem Palaste, im Vertrauen darauf, daß es Anderen gelingen werde, die Fundamente zu festigen, Fehlerhaftes zu beseitigen und Tragfähiges an seine Stelle zu setzen.

Es ist bekannt, wie zuerst der Thron der „regina scientiarum“, der Geometrie erschüttert wurde. Man kann heute diese Phase der Entwicklung als abgeschlossen betrachten. Der Streit um das Parallelenaxiom des EUKLID hat neue, ungeheure Gebiete erschlossen, von denen die antike Geometrie ein Teilbereich ist. Ihr Charakter als Wissenschaft aber dürfte in unseren Tagen als gesichert erscheinen.

Nun aber kam die Zahlenwelt an die Reihe. Die „unmöglichen“ Zahlen hatten sich so eingebürgert, daß es Zeit war, sich zu besinnen — nicht, wie man sie entbehrlich machen, sondern wie man sie möglich machen könne. Da war ferner der Grenzbegriff und mit ihm zusammen die Irrationalzahl, beide seit altersher ein Sorgenkind derer, die vollkommene Exaktheit der Mathematik forderten. Da waren die Rationalzahlen, die „negativen Größen“ — auch sie bargen bei konsequentem Durcharbeiten Fragen in sich. Und als man endlich alle diese Schwierigkeiten behoben zu haben glaubte, als nur noch die natürliche Zahl

als das Rätsel übrig zu bleiben schien, da trat die Mengenlehre CANTOR'S mit ihnen weitgehenden Ansprüchen auf den Plan. Sie brachte aber nicht nur die Forderung mit, das Fundament der ganzen Mathematik — womöglich der ganzen Logik und überhaupt aller Erkenntnis — zu sein. Vielmehr enthielt sie in vorliegendem Gewande die bekannten „Paradoxieen", die sie und alle auf sie gegründeten Fundamentierungsversuche sehr in Mißkredit setzten.

Fast gleichzeitig wurde der Logikkalkül derart vervollkommnet, daß mit seiner Hilfe ebenfalls an eine Bearbeitung der grundlegenden Probleme gedacht werden konnte. Auch seine Berechtigung galt es zu prüfen, seine Voraussetzungen festzustellen, seine Tragkraft zu erörtern.

Noch sind wir längst nicht fertig mit diesen Untersuchungen; und schon rauscht wieder eine neue Welle heran, die heute noch nicht Abzusehendes in ihrem Schoße birgt: die Axiomatik. Die glänzenden Erfolge, die dieser Methode bei der Sicherung der Geometrie beschieden waren, trieben weiter. Ein Zweig nach dem anderen, der Mathematik nicht nur, sondern auch der Naturwissenschaft, ja selbst logische Erwägungen werden axiomatisiert.

Und dies Alles verwebt und verspinnt sich in unseren Tagen immer mehr und mehr ineinander zu schier unlöslichem Geflecht. Je tiefer die Bergleute dringen, desto zahlreicher werden die Stollen, die von einem Lager zum anderen führen, desto kühner die Stützbogen, die Ausbauten, die unsichtbaren Dome.

Wir wollen uns nicht vermessen, durch dieses Labyrinth den Leser zu führen, ihm jedes einzelne Stück und seine Bestimmung erklärend. Vielleicht indessen gelingt es uns, einen kurzen Orientierungsplan der philosophischen Bemühungen in der Zahlenlehre seit GAUSS vorzulegen. Aber unser eigentlicher Zweck ist damit nicht gekennzeichnet.

Wir möchten zeigen, daß diesen Fragen mehr als ein bloß historisches und mehr als ein bloß mathematisches Interesse zukommt. Die Lösungsversuche sind uns Material, instruktives Material zu einer erkenntnistheoretischen Klärung von Grundbegriffen der Mathematik. Wir be-

treiben daher ihre Darstellung und stellenweise ihre Kritik von einem ganz bestimmten Gesichtspunkte aus. Er dient uns überall als letztes Richtmaß und lenkt und leitet alle unsere Schritte.

Ihn zu entwickeln wird daher unsere vornehmste Aufgabe zunächst sein.

§ 2. Einzelwissen.

Seitdem wir von der Griechen Zeiten her das Wort „Wissenschaft" in unseren Kulturkreis aufgenommen haben, sind wir stets und ständig bedacht, jeder Erkenntnis alsbald das Prädikat einer wissenschaftlich gesicherten beizulegen. Und es ist nicht zu bestreiten, daß diesem Worte eine merkwürdige Kraft der Überredung innewohnt. Es scheint geradezu in dem Wesen der Wissenschaft begründet, daß ihr solche Macht zukommt; und das ist auch in der Tat der Fall. Denn was bedeutet Wissenschaft eigentlich? Noch trifft man allerdings vielfach die Ansicht, daß ein Satz dann schlechterdings bindenden Charakter habe, wenn er durch die „moderne Wissenschaft" gesichert sei. Indessen führt gerade diese Meinung — die doch eigentlich besagte „moderne Wissenschaft" über allen Zweifel annimmt — zu einem recht bedenklichen Schluß, nicht nur über den Wert, sondern auch über das Wesen der Wissenschaft. Denn durch die gegebene Antwort werden wir auf die Einzelwissenschaften in ihrem gegenwärtigen Zustande verwiesen. Solch eine historisch bedingte Schätzung hat aber die unabweisbare Folge der Vergleichung verschiedener Entwicklungsphasen in sich, woraus dann ein Blick in die Zukunft sich von selbst ergibt. Und bei einer solchen Betrachtung erscheint dann bekanntlich das Bild, daß Sätze, die gestern als richtig galten, heute nicht mehr diesen Anspruch erheben können.

Am frühesten dürfte die Ethik den Verdacht geweckt haben, daß Sätze, die einmal (und selbst oft) als wahr behauptet und befolgt wurden, doch unter Umständen falsch sein können. Wenn hieraus freilich der Schluß gezogen

wird, eine wissenschaftliche Ethik sei überhaupt unmöglich, so ist das zum mindesten ein durch nichts an sich gerechtfertigter und daher übereilter Schluß, solange nicht bewiesen ist, daß es überhaupt nichts Bleibendes an ethischen Sätzen gibt; ein Beweis, der durch die bloß historische Betrachtung jedenfalls sicher nicht zu führen ist.

Greifen wir nun gleich zur „exakten“ Physik. Gelten für sie nicht ähnliche Erwägungen, wie für die Ethik? Gar zu offenkundig sind die Umwandlungen, die in letzter Zeit ein großer Teil ihrer grundlegenden Sätze erfahren hat.[1])

Es wäre zwecklos, dieses Bild weiter auszumalen, denn es ist allzu bekannt. Aber wir mußten wenigstens kurz daran erinnern, daß es nicht die Gültigkeit der Einzelresultate — das Wesentliche der Einzelwissenschaft — ist, was die Wissenschaft als solche kennzeichnet. Umgekehrt ist es vielmehr: die einzelnen Ergebnisse erhalten erst dadurch Wert, daß und soweit sie wissenschaftlich begründet erscheinen.

So übt das Wort „Wissenschaft“ nach wie vor mit Recht seinen Einfluß auf Jeden aus, der nach gesicherter und sachlich begründeter Einsicht strebt. Denn des Menschen Sinnen und Trachten ist darauf gerichtet, daß seine Aussagen, sein Denken, sein Handeln, sein ganzes

---

[1]) Freilich ist man hier in der Lage, eine Reihe von Bestimmungen anzugeben, die nunmehr den Charakter von grundlegenden Sätzen angenommen haben. Aber auf wie lange? Wenn man hier wirklich durchgreifen will, muß man ganz andere Sätze und Begriffe herausschälen, um den Charakter der Physik als Wissenschaft zu sichern. — Auch die formale Logik ist Angriffen und Änderungsversuchen ausgesetzt. Man denke etwa an die RUSSEL'sche Paradoxieenlehre; oder vgl. DINGLER'S später zu erwähnenden Versuch (S. 194ff. d. A.); sowie den „Intuitionismus" BROUWER'S (ähnlich übrigens J. KÖNIG, vgl. S. 8 Anm. d. A.) — Wenngleich es nicht gelungen ist (und hoffentlich nicht gelingen wird), die Unrichtigkeit des jetzigen Grundbestandes der „formalen Logik" nachzuweisen, so ist es andererseits nicht geglückt, ein Prinzip zu finden, nach dem sich ihre Sätze als richtig dartun ließen. Den Nachweis hierfür können wir zwar hier nicht erbringen, hoffen aber, ihn an anderer Stelle später vortragen zu können.

Leben sich letzten Endes unter einen Gesichtspunkt, auf eine einheitliche Formel bringen lasse; mag diese nun — um zwei Extreme herauszugreifen — Eigendünkel oder Gottessuchen lauten.

§ 3. Die Wissenschaft.

Und das ist gerade das, was der Gedanke „Wissenschaft" in vollkommener reiner Form bedeutet: Wissenschaft ist das Ordnen nach unbedingt einheitlichem Plane.

Wir haben hiermit den entscheidenden Gegensatz nicht nur für die Möglichkeit der Gedankenführung, sondern überhaupt der ganzen Lebensführung in der Hand. Man mag sich vorstellen, daß es Jemand ablehne, irgendeinen Leitstern als unverbrüchlich bestimmend anzuerkennen, nun wohl, dann muß er aber auch die Folgen auf sich nehmen. Sie bestehen, kurz gesagt, darin, daß er nichts tun darf mit dem Anspruch, dadurch das Interesse Anderer zu erregen. Sonst würde er ja etwas Allgemeinverbindliches anerkennen! Für die Andern — deren Existenz übrigens ihm schon vollständig problematisch wäre und nur „konventionell" festgesetzt werden könnte — ist er bestenfalls ein Stück Natur; für sich selber ein „Ich weiß nicht was", das am besten tut, — zu schweigen[1])!

Wir wollten durch diese Betrachtungen nur zeigen, wie tief wir mit diesem Unterschied in unser gesamtes Kulturleben eingedrungen sind, und daß wir tatsächlich, mit dem Gegensatz von wissenschaftlich und unwissenschaftlich, den Angelpunkt haben, um den sich unser Leben dreht.

Denn dem oben geschilderten Zustande des „Ich weiß nicht, was" gegenüber erhebt sich nun der Gedanke der

---

[1]) Diese Gedankengänge führen zu Ethik und Soziolphilosophie. Wir unterlassen daher eine ausführliche Darlegung von ihnen. — Es wäre vielleicht nicht unmöglich, daß die Grundverschiedenheit der buddhistischen Vorstellungen von den abendländischen auf ähnliche Gegensätze zurückführbar ist.

Wissenschaft, d. i. der Einheit alles Möglichen, in seiner vollen Reinheit. Sie gilt es vor allem zu erfassen.

Man darf sich hier nicht irre machen lassen durch die Frage, ob solche Einheit tatsächlich durchführbar sei. Diese Frage kommt wirklich erst sehr in zweiter Linie in Betracht. Denn bevor ich entscheiden kann, ob ich tatsächlich im Besitze irgendeines Etwas bin, muß ich doch erst einmal wissen, was dieses Etwas eigentlich ist. Sowie man diese Identitätsfrage außer Acht läßt, können alle möglichen Verwechslungen vorkommen. Wir leiden ja gerade in der Philosophie sehr an dem Mangel einer einheitlichen Terminologie, die es ermöglicht, sofort zu erkennen, was der Andere eigentlich meint. Das hat dann leicht zur Folge, daß der Identitätsnachweis entweder gar nicht berührt wird — was oft dazu verleitet, einem Worte alle möglichen Bedeutungen unterzulegen (Schlagwort) — oder daß er derart subtil behandelt werden muß, daß man am Schluß dieser Einleitungen schon erschöpft ist.

Uns schien daher am besten, gleich von dem Grundgedanken auszugehen, der nicht entbehrt werden kann, wenn Einheit und Ordnung in unserem Dasein herrschen sollen. Wir wollen ihn noch ein wenig betrachten.

Genügend hervorgehoben haben wir wohl seinen Unterschied vom bloßen Wissen. Wissen ohne Wissenschaft hat keinen Sinn und wird faktisch auch wohl kaum gefunden werden. Wissen ist eine Fähigkeit und ein Besitz; Wissenschaft dagegen ist die Art, wie diese Fähigkeit zu verwenden und dieser Besitz zu verwalten ist. Es wird also andererseits Wissenschaft ohne Wissen (Erkenntnis ohne Kenntnisse) ein zwar denkbarer, aber gänzlich belangloser Begriff sein, da er in keiner Beziehung zu irgendeinem vorstellbaren Erkennenden (Menschen) gebracht werden kann.

Im Gegensatz also zu dem Wissen, das einen tatsächlichen Bestand repräsentiert, ist im Gedanken der Wissenschaft eine Aufgabe enthalten. Nämlich die: aus einem Chaos, das uns gegeben ist, einen Kosmos zu

machen, — die Einzelheiten, von denen wir als Material niemals Abstand nehmen können, nach schlechterdings einheitlichem Plane ordnend.

Ist es somit der Gedanke der Einzelheit, der dem des Wissens anhaftet, so ist es der Gedanke der Einheit, der dem der Wissenschaft als letzter Halt der Gedanken zugrunde liegt.

Denn wollte jemand versuchen, über den Gedanken der Möglichkeit einer einheitlichen Ordnung hinauszugehen, also auch über den Unterschied zwischen wissenschaftlich und unwissenschaftlich sich zunächst hinwegzusetzen und einen umfassenderen und allgemeingültigeren Standpunkt, als diesen einzunehmen, so hätte er schon durch den Versuch allein den Versuch selber zum Scheitern verurteilt. Denn gerade dadurch, daß er einen solchen Standpunkt sucht, setzt er die Möglichkeit einer allgemeingültigen einheitlichen Gedankenführung voraus. Damit ist er aber wieder auf den Ausgangspunkt zurückgeworfen.[1])

Aus allen diesen Erwägungen heraus sind wir von dem Gedanken der Wissenschaft in seiner vollen Reinheit als Grundpfeiler alles (menschlichen) Denkens ausgegangen. Und er soll auch den leitenden Gesichtspunkt abgeben, unter dem letzten Endes alle unsere Probleme betrachtet werden.

---

[1]) Man wird bei den vorliegenden Ausführungen sich vielleicht manchmal an J. KÖNIG'S „*Neue Grundlagen*" (*61*) erinnern und eine gewisse Übereinstimmung festzustellen versuchen. Demgegenüber sei aber bemerkt, daß KÖNIG über den Gedanken der Wissenschaft hinausgehen will. Wir müssen daher diesen Versuch von vornherein ablehnen. Schon der Anspruch, den BERNSTEIN an das Ursystem von KÖNIG stellt, daß es sich als ein absolut anzuerkennendes dartun müsse, wenn die absolute Widerspruchslosigkeit durch es nachgewiesen werden solle (BERNSTEIN *Finitismus (3)* S. 74f.), und daß diese Frage noch diskutiert werde, — schon dieser mit Recht erhobene Einspruch zeigt, daß nicht das gelungen ist, was KÖNIG wollte: ein absolut einwandfreis System der „vorwissenschaftlichen" Sätze anzugeben.

B. Erste Folgerungen.

§ 4. Richtig und unrichtig.

Erste Beweisanalyse.

Daher ist es zunächst unsere Aufgabe, festzustellen, welche Anwendungen wir von diesem Gegensatz zu machen gedenken, und wie wir von ihm aus Möglichkeiten entwickeln können, über vorgelegte Probleme zu entscheiden, und über welche. Entscheidungen über eine Frage wollen wir natürlich nur in dem Sinne herbeiführen daß wir den in ihr enthaltenen Satz als einen solchen dartun, der wissenschaftlich ist, oder daß wir seine Unwissenschaftlichkeit festlegen.

Damit ist die erste und eigentlich ausschließliche Anwendung unseres Unterschiedes aufgestellt. Wir besitzen hierfür in der Sprache mannigfache Ausdrücke. Wir teilen die Sätze nach diesem Gesichtspunkt ein in wahre und falsche, richtige und unrichtige.[1])

Der Unterschied zwischen richtig und unrichtig ist mithin eine unmittelbare Anwendung der Alternative wissenschaftlich gegen unwissenschaftlich. Daher können wir auch folgendermaßen sagen: Richtig ist ein Gedanke dann, wenn er sich in unbedingt einheitlicher Weise in das Ganze unseres Geisteslebens einfügen läßt. Ist diese Möglichkeit dagegen ausgeschlossen, so ist er unrichtig und hat aus der wissenschaftlichen Betrachtung auszuscheiden.[2])

So wenig umfangreich in dieser kurzen Formulierung auch die Anwendungsmöglichkeit unseres Ausgangspunktes

---

[1]) Wir werden uns im allgemeinen des letztgenannten Sprachgebrauches bedienen. „Wahr" und „wirklich" sind zwar fast allgemein als verschieden anerkannt, indessen fügt sich der tägliche Sprachgebrauch dieser Unterscheidung noch nicht.

[2]) Wenn man dieser Definit on zustimmt, ist es unmöglich, Prinzipien und Sätze zu dulden, von denen man nicht weiß, ob sie richtig seien Auch geht es nicht an, Gedanken so zu behandeln, als ob sie richtig wären, ohne daß man eben auch nur so tut, als ob man Wissenschaft triebe. (Vgl. S. 99 Anm. 2 und S. 123 Anm. 1 d. A.)

zu sein scheint, so beherrscht sie doch in Wahrheit — wie schon oben angedeutet — unsere ganze Kultur. Ja nicht nur unsere Kultur, sondern überhaupt jede Erscheinung die einen Anspruch darauf erhebt, mit Kultur in Zusammenhang gebracht zu werden. Denn was heißt Kultur anderes, als das Streben nach dem Richtigen? Das zeigt sich schon rein äußerlich darin, daß jede, selbst die einfachste Tatsachenbehauptung entweder bewiesen oder im Vertrauen auf die Richtigkeit des in ihr enthaltenen Satzes geglaubt wird.[1])

Wir wenden uns nunmehr der Frage zu, wie wir von diesem Standpunkt aus über vorgelegte Probleme entscheiden können und welcher Art diese also behandelten Fragen sein müssen, um eine Erledigung unter den gegebenen Voraussetzungen erfahren zu können.

Wir haben im Vorigen (§ 3) bereits ein Beispiel dafür erbracht, daß sich tatsächlich mit unseren Hilfsmitteln Behauptungen bejahen oder verneinen lassen, — hinsichtlich ihrer Richtigkeit oder Unrichtigkeit. Denn wir haben dort als unrichtig nachgewiesen, im Streben nach Einheit in der Gedankenführung über den Gegensatz von wissenschaftlich und unwissenschaftlich hinauszugehen.

Es mag zunächst sonderbar erscheinen, daß wir den Anspruch erheben, bewiesen zu haben, daß der Unterschied wissenschaftlich-unwissenschaftlich den letzten Halt der Gedanken darstellt. Scheint es doch sonach, als müßten wir dabei Voraussetzungen angenommen haben, die, über diesen Gegensatz entscheidend, selber über ihn hinausgriffen. Dann hätten wir freilich durch die Tat gerade das Gegenteil von dem gezeigt, was wir mit Worten darzulegen versuchten.

Dem ist nun aber nicht so. Eine genauere Analyse des Beweises lehrt vielmehr, daß wir anders verfahren sind

---

[1]) Daß auch Tatsachen-Behauptungen stets Richtigkeit festlegen wollen, ergibt sich schon aus dem Begriff der Tatsache. Dieser besagt nämlich, daß eine Einzelerscheinung dem Ganzen der Welt, nach einer festen Grundanschauung harmonisch einverleibt werden soll.

als die Paradoxie annahm. Wir haben nämlich den Gedanken der Wissenschaft in seiner Vereinzelung als besonderen Gedanken beschrieben, ihn lediglich in dieser seiner Eigenart eines besonderen, für sich bestehenden Gedankens genommen. Und dann haben wir einfach geprüft, ob es möglich ist, ohne ihn etwas unbedingt allgemeingültig, d. h. nach schlechterdings einheitlichem Plane geordnet, zu denken Diese Prüfung war nun in diesem Fall sehr einfach. Denn es ergab sich sofort, daß wir den Gedanken eines unbedingt einheitlichen Verfahrens ohne einen solchen Gedanken, d. h. ohne sich selbst hätten denken sollen. Wir hätten also den in Frage stehenden Gedanken gar nicht in Frage stellen können: wir hätten die ganze Untersuchung nicht beginnen dürfen, ohne vorher den Gegensatz von wissenschaftlich und unwissenschaftlich aufzuheben. Damit war die Unrichtigkeit der in Frage stehenden Behauptung dargelegt.

Daß wir also über den Gedanken „Wissenschaft“ wissenschaftlich entscheiden konnten, liegt nicht etwa daran, daß wir doch über ihn hinausgegangen wären. Vielmehr ergibt sich dies daraus, daß wir ihn als besonderen Gedanken in das Ganze unserer Gedankenwelt einfügen.

Wir werden im folgenden sehen, wie sich durch Erweiterung dieser Untersuchung eine unserer Beweismethoden ergibt. Hierbei verstehen wir unter „beweisen“ — wie übergens auch im vorhergehenden — soviel, wie dartun, daß sich etwas wissenschaftlich erfassen läßt.

§ 5. Gesamtheit der Erkenntnis.

Es steht also folgende Frage zur Diskussion: Auf welchem Wege läßt sich über die Richtigkeit eines bestimmten gegebenen Satzes eine Entscheidung fällen? Oder, wenn wir noch einen Schritt weiter zurückgehen: Wann können wir von einem Satze sagen, daß er sich nach unbedingt einheitlichem Plane in das Ganze unseres Geisteslebens einfüge?

Wir wollen hier ganz kurz ein Mißverständnis aus dem Wege räumen, das den ganzen Sinn der Frage auf den Kopf stellen könnte. Mit dem Worte „Geistesleben" ist nicht die tatsächlich vorhandene oder geleistete Bewußtseinstätigkeit eines Individuums oder auch mehrerer Individuen gemeint. Es gibt ja in Wirklichkeit so und so viele Menschen, denen es ganz gleichgültig ist, ob es richtig ist, daß die Sonne sich um die Erde dreht, oder nicht. Und es finden sich sicherlich auch Leute, für die das Problem als solches gar nicht existiert, ob ein Vertrag, in dem sich die eine Partei zu allem, die andere zu nichts verpflichtet — ob solch ein Vertrag überhaupt zu Recht bestehe! Das Leben der Einzelnen und jeder Gruppe von ihnen — mag sie auch noch so groß zahlenmäßig auftreten — ist beschränkt und muß es der begrenzten Natur des Menschen nach sein. Daher: wenn wir nur das von Menschen tatsächlich Geleistete oder zu Leistende in Betracht ziehen, kommen wir nie zu etwas Allumfassendem, wie es der Gedanke der Wissenschaft fordert. So ist also das, was wir das „Ganze unseres Geisteslebens" nannten, nicht etwa nur die Fülle der einmal dagewesenen oder vorhandenen oder wirklich einmal später auftauchenden Gedanken, sondern die Gesamtheit alles dessen, was überhaupt als erkennbar in Betracht gezogen werden kann.

Die Aufgabe, die in dem Worte „Wissenschaft" sich ausprägt, geht also auf nichts geringeres aus, als darauf, die Ordnung in aller je möglichen Erkenntnis festzustellen. Wenn man sich diesen Gedanken in seiner ganzen ungeheuren Größe und Erhabenheit vorstellt, so mag man wohl erstaunen über die Kühnheit, die in den drei Wörtlein liegt: „Quod erat demonstrandum!" Besagen sie doch nicht weniger, als das: Mag da kommen, was will, der bewiesene Satz ist und bleibt richtig; alle Erkenntnis, auch die der Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft, wie sie auch immer lauten möge, muß mit dem Satz in Einklang zu bringen sein — oder verworfen werden!

Wir haben hiermit die am Eingang des Paragraphen formulierte Frage noch einmal in aller ihrer Größe hervor-

treten lassen. Wird nun aber nicht gerade hierdurch die Wissenschaft, so wie wir sie „in ihrer vollen Reinheit" haben hervortreten lassen, zu einem Scheinwesen verurteilt? Verflüchtigt sie sich nicht zu einem bloßen Hirngespinst?

Demgegenüber ist festzustellen, daß wir zum mindesten einen wissenschaftlichen Satz kennen: den der Möglichkeit von Einheit und Ordnung. Auf ihn uns stützend, können wir die Behauptung aufstellen: „Es gibt Wissenschaft".

Nehmen wir zu diesem Satz noch hinzu, daß alles, was den Namen „Theorie" trägt, zum mindesten den Anspruch erhebt, wissenschaftlich zu sein, so ist der Einwand von der Belanglosigkeit der „reinen Wissenschaft" als erledigt anzusehen. Wenn er doch ab und an erhoben wird, so beruht das darauf, daß man sich darüber gar nicht klar ist, daß dieser Einwand selber eine Theorie in sich schließt. Und Theorie ist nichts anderes als eine Lehre, die den Anspruch erhebt, daß jede Besonderheit, die unter sie gebracht wird, nach unbedingt einheitlichem Plan in die Gesamtheit der Erkenntnis sich einfügen lasse; d. h. wenn Wissenschaft eine Chimäre wäre, so wäre der betrachtete Einwand auch eine!

Nun scheint aber durch diese letzte Bemerkung — daß alles, was „Theorie" heißt, in den Rahmen des Wissenschaftlichen einbezogen werden müsse — wieder eine andere Schwierigkeit für die Wissenschaft zu entstehen. Denn liegt nicht eine derart verwirrende Fülle von Theorieen vor, daß sie in den verschiedensten Disziplinen behandelt werden müssen? Damit man doch wenigstens über je ein Teilgebiet genaue Kenntnis erhalten, und auf Grund dieser die Wissenschaft im einzelnen und dadurch im ganzen gefördert werden könne. Wie soll es da noch möglich sein, den Überblick zu behalten und wirklich mit gutem Gewissen den Satz aussprechen zu können: „Was zu beweisen war!"?

§ 6. Inhalt, Gegenstand, Methode.

Aber gerade dadurch wird uns die Aufgabe, die wir uns (§ 5 a. A.) steckten, um vieles erleichtert. Untersuchen

wir nämlich einen bestimmten Satz auf seine Richtigkeit hin, so stellen wir zunächst einmal fest, welcher Disziplin er entnommen ist. Dabei betrachten wir die Methoden, mit denen der betreffende Wissenschaftszweig arbeitet und an Hand derer unser zu untersuchender Satz begründet wurde.[1]) Je nachdem sich nämlich diese Methoden als wissenschaftlich erweisen oder nicht, wird dann auch unser spezieller Satz richtig oder unrichtig sein.

Wir wollen diesem Gedanken noch eine andere Formulierung geben, bei deren Ausarbeitung sich manche wichtige Unterscheidung und Klärung ergeben dürfte.

Verstehen wir unter dem Inhalt eines Begriffes, eines Satzes oder einer Gruppe von Sätzen — kurz, unter dem Inhalt einer Erkenntnis dasjenige, wodurch sich diese von aller anderen Erkenntnis unterscheidet, so können wir sagen: Über die Richtigkeit eines Satzes entscheiden wir, indem wir den Inhalt der ihm übergeordneten Disziplin auf seine Wissenschaftlichkeit hin prüfen.

Es wird nötig sein, darauf hinzuweisen, daß unter Inhalt hierbei nicht etwa — wie das wohl des öfteren geschehen mag — das Objekt oder die Gesamtheit der Objekte verstanden wird, wie sie in einer Untersuchung enthalten sind, sondern die besondere Art und Weise, nach der diese Gegenstände betrachtet werden. Der Gegenstand der Untersuchung gibt nämlich kein Merkmal ab, nach dem sich die Disziplinen scharf scheiden lassen[2]); er kann somit auch keines für unsere Untersuchung sein. Denn ein solcher

[1]) Unter Methode verstehen wir, wenn nichts anderes angegeben ist, nicht die Fertigkeit, bestimmte Sätze zu finden; sondern eine bestimmte Art des Denkens, auf Grund welcher ein Satz bewiesen wird. Wir werden künftighin, wenn nötig, diesen Gegensatz durch die Worte „heuristisches“ und „Beweis“-Prinzip zum Ausdruck bringen.

[2]) „Disziplin“ fassen wir hierbei als verschieden von der im Einzelfall des gelehrten Studiums notwendigen Beschränkung auf. Solche Schranken sind selbstredend „der besseren Übersicht halber“ unentbehrlich. Aber es hat doch kaum einen Sinn, etwa

Gegenstand kann vielen Zweigen der Wissenschaft gemeinsam sein: Das Salz etwa kann chemisch, physikalisch, mathematisch, physiologisch, juristisch, volkswirtschaftlich, ja selbst ethisch und (wenn man das noch als wissenschaftlich bezeichnen will) ästhetisch untersucht werden, — Salz bleibt dabei Salz! Aber dadurch, daß es verschiedenen Betrachtungsweisen unterworfen wird, werden verschiedene Eigenschaften an ihm entwickelt, und das macht einen Inhalt der verschiedenen Wissenszweige in diesem Sonderfall aus. Das Salz ist also hierbei Objekt der verschiedenartigsten Erkenntnisse, nicht aber deren Inhalt. Dieser liegt vielmehr in den von den verschiedenen Methoden abhängigen Ergebnissen. So ließen sich noch manche andere Beispiele anführen: Die „Welt" ist naturwissenschaftlicher wie ethischer Untersuchung unterworfen; die Erde kann Gegenstand der Jurisprudenz wie der Astronomie sein; Beethovens Symphonieen kann man akustisch-physikalisch ebensowohl, wie ästhetisch oder musikgeschichtlich analysieren, es ist immer wieder dasselbe Schauspiel: Das Objekt kann vielen Fächern gemeinsam sein, die Art der Untersuchung nicht!

Die Frage nach der Wissenschaftlichkeit einer Erkenntnis geht nun auf deren Inhalt und zwar auf die Methodik einer übergeordneten Erkenntnisgruppe. Zum besseren Verständnis dieses Satzes diene folgende Betrachtung.

Unter Erkenntnis überhaupt verstehen wir die Untersuchung eines Etwas nach einer bestimmten Art und Weise des Auffassens und Begreifens. Es lassen sich also in dieser Hinsicht innerhalb jeder Erkenntnis zwei Bestandteile unterscheiden: das „Was" der Untersuchung — wir nennen es den Gegenstand oder das Objekt — und das „Wie" — die Methode. Wir stellen nun folgende Frage: Welcher dieser beiden

von der „Disziplin" einer „Geschichte Straßburgs im 19. Jahrh." oder einer „Disziplim" der „Botanik der Lippenblütler" zu reden. Und das müßte erlaubt sein, wenn der Gegenstand für die Grenzen der „Disziplin" entscheidend sei.

Bestandteile ist der, der eine Erkenntnis zu einer wissenschaftlichen oder zu einer unwissenschaftlichen machen kann? Oder sind es beide? Mit anderen Worten, die Frage nach der Wissenschaftlichkeit einer Erkenntnis überhaupt spaltet sich in zwei Fragen, wie folgt:

1. Ist es möglich, daß eine Erkenntnis dadurch wissenschaftlicher Art wird, daß sie auf einen bestimmten Gegenstand (oder eine bestimmte Klasse von Gegenständen[1])) sich bezieht, gleichgültig, welcher Art der Betrachtung dieser unterworfen wird? und

2. Ist es möglich, daß eine Erkenntnis dadurch wissenschaftlicher Art wird, daß sie eine bestimmte Art der Betrachtung anwendet, gleichgültig, auf welchen Gegenstand diese sich beziehen mag?

Wir geben hier gleich noch eine andere Formulierung:

1. Läßt sich ein „Universalgegenstand" denken, auf den bezogen jede Methode wissenschaftliche Erkenntnisse liefert? und

2. Läßt sich eine „Universalmethode" denken, nach der betrachtet jeder Gegenstand wissenschaftliche Erkenntnis liefert?

Man kann leicht zeigen, daß die zweite Frage zu bejahen ist[2]). Nach unserer ersten Formulierung würde nämlich eine solche Art der Betrachtung zu wählen sein, die nach unbedingt einheitlichem Plane fortschreitet; und nach unserer zweiten Fragestellung würde eben diese Art der Betrachtung als „Universalmethode" auf den Thron zu erheben sein.

Dagegen ist die erste Frage zu verneinen. Ihre Bejahung scheitert gerade an der Außerachtlassung der Methode; denn wenn wir etwa annähmen, einen solchen Gegenstand gefunden zu haben, wie er verlangt wird, so brauchten

---

[1]) Etwa Gegenstände der „Natur" im Gegensatz zu „bloß geistigen" oder „imaginären" Gegenständen. — Im folgenden wird auch eine solche Klasse einfach als „Gegenstand" bezeichnet.

[2]) Sofern die Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis überhaupt zugestanden wird.

wir ihn nur einer unwissenschaftlichen Denkart zu unterwerfen, um die Wissenschaftlichkeit der Erkenntnis zu vernichten, die angeblich durch jede Denkart aus ihm gewonnen wird. D. h. wir hätten nur eine Methode derart auszuwählen, daß sie schlechterdings jede Einheitlichkeit der Ordnung ausschließt. Dann würden wir gewahren, daß auch unser „Universalgegenstand", auf solche Weise zur Erkenntnis gebracht, sich nicht in einen unbedingt einheitlichen Plan einfügen läßt. An solchen Methoden ist nun kein Mangel. Wir brauche nnur eine zu nehmen, die als höchsten Gedanken irgendeine Begrenztheit annimmt. Wir werden später zeigen, daß und inwiefern diese Methoden als unwissenschaftliche zu bezeichnen sind[1]), für jetzt genüge der Hinweis auf ihr Vorhandensein, und die Aufforderung, die Probe auf das Exempel zu machen.

Durch diesen Schritt ist die „Welt" — die sich so gerne als beherrschend in philosophischen Untersuchungen darbietet (Weltanschauung) — mit all ihrer betäubenden Fülle und Mannigfaltigkeit als unmittelbares Objekt unserer Untersuchungen ausgeschaltet. Sie interessiert uns nur noch als Gegenstand möglicher Erkenntnis, hat also nur, insofern sie von bestimmten Erkenntnisweisen als Objekt in Betracht gezogen wird, Platz in unseren Darlegungen zu beanspruchen.

Das aber, was nunmehr in den Vordergrund der Erörterung bei uns treten muß, wenn wir unsere ursprüngliche Frage beantworten wollen, ist das Suchen nach den Bedingungen, denen die Arten des Begreifens genügen müssen, die sich anheischig machen, unbedingte Einheit planmäßig durchzuführen. Wir brauchen somit nicht jeden einzelnen Satz wieder vollkommen von neuem zu untersuchen; es genügt, festzustellen, von welchen allgemeinen Denkweisen (Methoden) er abhängig ist — die Arbeit der Einzelwissenschaften — und dann zu erwägen, inwieweit deren Inhalt wissenschaftlicher Natur ist.

---

[1]) Vgl. etwa die „bloß subjektiven" Erkenntnisse. S. 28f d. A.

C. Beweismethode.

§ 7. Form und Stoff.

Zweite Beweisanalyse

Fast könnte es nach den letzten Worten so scheinen, als hätten wir uns mit diesen Ausführungen doch nur wieder im Kreise bewegt und seien der eigentlichen Lösung der Aufgabe um keinen Schritt näher gekommen. Man könnte meinen, wir seien jetzt doch wieder auf unser altes Problem zurückgestoßen worden, nur daß nun nicht mehr die ursprünglich vorgelegten Sätze, sondern andere, über diesen stehende, auf ihre Richtigkeit hin zu untersuchen wären.

Aber ganz abgesehen davon, daß damit de facto eine erhebliche quantitative Einschränkung des zu untersuchenden Materials erzielt wäre, — ganz abgesehen ferner von der dadurch erreichten sehr wesentlichen Ausschaltung einer verwirrenden Fülle von Kleinarbeit, sind doch schon in den Ausführungen des vorigen Paragraphen zwei Gedankenreihen angebrochen worden, bei deren Verfolg sich wesentliche Fortschritte zum Erreichen des gesteckten Zieles zeigen werden. Wir wollen diese beiden Ketten durchlaufen.

Die erste von ihnen zeigt an, daß durch das Ergebnis des § 6 eine ganz bestimmte Marschroute vorgezeichnet ist. Wir haben gesagt, es sei immer wieder auf die „übergeordnete Denkweise“ zu rekurrieren. Was heißt nun das: übergeordnet?

Das könnte so ausgedeutet werden, als ob man möglichst viele gleichartige Erkenntnisse zu sammeln und das ihnen Gemeinsame herauszusuchen habe. Dies sei dann das ihnen Übergeordnete. Im wesentlichen wäre dann also unsere Methode nichts anderes, als eine sehr allgemein gehaltene Anweisung zur Induktion.

So nützlich nun auch solch ein induktives Verfahren als heuristischer Leitfaden sein mag, dessen Bedeutung in dieser — aber auch nur in dieser — Beziehung nicht zu

unterschätzen ist, so wenig wäre diese Anweisung zur Lösung unserer Frage geeignet.

Denn erstens tritt hier der alte Zirkel zu Tage, der jeder Induktion anhaftet (solange sie durch keine geklärte Deduktion gesichert wird). Nämlich, daß das, was durch sie erkannt werden soll, bereits als klar erkannt vorausgesetzt wird. Zweitens aber kann Induktion sich nur mit fertig vorliegender Erkenntnis befassen und über eine solche ein Urteil abzugeben versuchen. Die Stellung eines Satzes in aller überhaupt möglichen Erkenntnis festzulegen, das ist sonach eine Aufgabe, die die Kräfte der induktiven Methode weit übersteigt. Wollte man trotzdem dieses Problem mit Hilfe der Induktion zu erledigen sich bemühen, so kann das nicht geschehen, ohne irgendwelche Lösungen zu antizipieren (die dann Gesichtspunkte der induktiven Sammlung und Klassifizierung abgäben). Und gerade um die Art, wie solche Lösungsversuche begründet werden können, handelt es sich hier. Die Induktion kann also hier, wie überall, gewisse als bekannt vorausgesetzte — oder vorausgeahnte — Resultate las sehr wahrscheinlich hinstellen; aber nicht mehr.

Wir erinnern — um den Gegensatz zur Induktion hervorzuheben — daran, wie wir früher einen Beweis für die Wissenschaftlichkeit der Voraussetzung des Gedankens unbedingter Einheit geführt haben. Das kann als ein Unterfall unserer jetzigen Frage betrachtet werden. Nehmen wir nämlich den dort als wissenschaftlich erwiesenen Satz als eine bestimmte „Erkenntnis", so können wir den dort (§ 3) geführten Gedankengang als „Präzedenzfall" solcher Bezugnahme auf „übergeordnete Denkweisen" bezeichnen. Darin, daß „vorgelegter Satz" und „übergeordnete Denkweise" inhaltlich miteinander übereinstimmten, lag das Spezielle der Untersuchung in § 3, die aber jedenfalls nicht induktiv war. Hier handelt es sich nun um den allgemeinen Fall, nämlich, eine wissenschaftliche Methode zur Untersuchung der Wissenschaftlichkeit irgendeiner Erkenntnis zu bestimmen. Und dazu gibt uns § 6 den Schlüssel in die Hand.

Die Rekursion auf die „übergeordnete“ Art der Betrachtung ist nämlich nicht induktiv, sondern so zu verstehen, daß wir in jeder Erkenntnis zwei Teile zu unterscheiden haben, von denen der eine das wissenschaftliche Prius des anderen ist. In dem Sinne, daß dieser erste Teil nicht fortgedacht werden kann, ohne daß das zweite Element jeden Halt in der Gesamtheit aller möglichen Erkenntnis verliert; wohingegen das Umgekehrte sehr wohl der Fall sein kann. Wir haben daher in den voranstehenden Erwägungen nicht nur eine quantitative Einschränkung des Untersuchungsfeldes sondern einen wichtigen Beitrag — in Gestalt eines Beispieles — zu unserer Haupt- und Kernfrage erhalten.

Es galt (in § 6) herauszuheben, daß sich in jeder Erkenntnis ein Bestandteil unterscheiden lassen muß, der die Wissenschaftlichkeit oder Unwissenschaftlichkeit der Erkenntnis bedingt, von einem anderen, der in dieser Hinsicht von ihm abhängig ist, insofern er eben durch den ersten Bestandteil in seiner Stellung gegenüber der Gesamtheit unseres Geisteslebens voll bestimmt wird. Es galt ferner, zu zeigen, wie sich dartun läßt, daß eine solche Trennung vollzogen werden kann und welcher Bestandteil das wissenschaftliche Prius ist.

Der eingeschlagene Weg war der, daß man den zu diskutierenden Satz — „Erkenntnis ist die Untersuchung eines Etwas nach einer bestimmten Art und Weise des Auffassens und Begreifens“ — in seine Elemente auflöste — „Gegenstand“ und „Methode“ — und untersuchte, ob der eine oder der andere vernachlässigt werden könne, ohne daß der andere oder der eine seine Bedeutung für den analysierten Satz im Hinblick auf die Gesamtheit aller möglichen Erkenntnis verliere — hier: ohne die Erkenntnis zu einer unwissenschaftlichen zu machen.

Wir nennen nun den derart über die Wissenschaftlichkeit einer Erkenntnis entscheidenden Bestandteil von ihr „ihre wissenschaftlich notwendige Bedingung“ oder kurzweg nach altem philosophischen Sprachgebrauch „ihre Form“. Das dagegen, was eine Erkenntnis gerade zu

diesem als vorliegend gedachten Einzelsatz macht, also die in ihr methodisch erfaßte und bearbeitete Besonderheit (Gegenstand) nennen wir „ihr wissenschaftlich Bestimmtes“ oder, ebenfalls kurz, „ihren Stoff“.

Das Ergebnis dieser Untersuchung kann man also in leicht verständlicher Abkürzung so wiedergeben: Erkenntnis ist geformter Stoff.

Die zweite Gedankenreihe, die wir an die Darlegungen des § 6 anschließen können, läßt sich in folgendem Satz etwa zum Ausdruck bringen: Die Methode, die Wissenschaftlichkeit einer Erkenntnis durch Herausarbeiten aller sie wissenschaftlich bedingenden Elemente zu prüfen, ist selbst eine wissenschaftliche Methode. Sie ist ein Kriterium für sich selbst, für ihre eigene Richtigkeit. Wir haben bereits gesehen, daß sie, auf sich selber angewendet, ein befriedigendes Resultat ergibt.[1])

Sonach haben wir tatsächlich durch die Reduktion unserer Untersuchung auf die Methode den Weg gewiesen, der bei einer Untersuchung über Wissenschaftlichkeit einer Erkenntnis eingeschlagen werden muß: das Herausarbeiten der wissenschaftlich bedingenden Elemente, die in den Einzelsätzen und -methoden enthalten sind. Dabei ist dann noch zu berücksichtigen, daß dieses Herausarbeiten nicht der Willkür des Einzelnen, des gerade Forschenden überlassen, sondern ebenfalls in wissenschaftlich gesicherter Weise geschehen soll. Zu diesem Behuf müssen die Ergebnisse der Forschung sich in einheitlicher Weise in die Gesamtheit der Erkenntnis einfügen lassen, sie müssen Glieder dieser Einheit sein. Daher kann

---

[1]) Von einem „logischen“ Standpunkt aus (der für uns jetzt freilich noch keinen präzisen Sinn hat) kann man sagen: der hier aufgestellte Begriff „Erkenntnis“ ist „in sich widerspruchsfrei“. — Wir werden später (S. 155 d. A.) diese Erwägungen von einem ähnlichen Standpunkt aus betrachten, der sie etwa als „Versuch zur Darstellung von Grundzügen eines Axiomsystems der Erkenntnistheorie“ charakterisieren könnte.

man nur eine solche Lösung unserer Aufgabe als befriedigend ansehen, bei der diese Bedingungen erfüllt sind.

§ 8. Aufgabe der Philosophie.

Es dürfte angebracht sein, an dieser Stelle einen Irrtum zu beseitigen, der sich manchmal eingeschlichen hat und auf Seiten der Vertreter der Einzeldisziplinen sowohl wie derer der Philosophie eine an sich unnötige, wiewohl leider teilweise gerechte schroffe Ablehnung der Bemühungen der Gegenseite hervorgerufen hat.

Es darf und kann nicht Aufgabe der Philosophie sein, über die Richtigkeit jedes einzelnen Satzes, wie etwa: „Die Sonne geht im Osten auf" sich ein Richteramt anzumaßen. Das ist Aufgabe des betreffenden speziellen Zweiges der Wissenschaft. Wollte die Philosophie hier eingreifen, so könnte das auf zweierlei Weise geschehen.

Zum ersten könnte sie nämlich bei ihrer Entscheidung eine Methode anwenden, die ihrem innersten Gehalt nach die gleiche ist, wie die, welche die Einzeldisziplin angesetzt hat, mögen auch beide ihrem Aussehen nach Verschiedenheit zeigen. Dann ist schwer einzusehen, warum diese Untersuchung eine philosophische und nicht eine der betreffenden Sonderwissenschaft genannt wird. Es ist klar, daß man durch geeignete Wahl der Formulierung zwar diesen und jenen Punkt, der vielleicht den Philosophen besonders interessieren mag, wird besser ans Licht rücken können, aber deswegen bleibt man doch mit solchen Untersuchungen immer auf dem Boden der Einzelforschung.

Zum zweiten kann man aber eine vollkommen neue und zwar „philosophische" Methode ansetzen. Dann ist zunächst selbstverständlich deren Wissenschaftlichkeit nachzuweisen. Sie kann ferner entweder eine solche sein, die für *jede* Erkenntnis gelten will, dann ist sie eine wirklich philosophische, oder ihr Wirkungskreis kann nur als beschränkt angenommen werden — dann ist sie irgendeinem Sonderfach zuzuweisen. Im ersten Fall — denn nur dieser kommt jetzt in Frage — kann sie die Richtig-

keit des vorgelegten Satzes entweder bejahen oder verneinen, d. h. im Sinne der Spezialforschung beantworten oder nicht.

Wird der Satz für richtig befunden, so muß sich die Methode, durch die bisher der Satz nachgewiesen war, als ein Teil oder als eine besondere Anwendung der neuen Methode ergeben. Sie vermittelt den Zusammenhang zwischen der letzteren und dem fraglichen Satze. Bestünde eine solche Vermittelung nicht, so ist nicht einzusehen, wie die speziell für einen bestimmten Satz gültige Methode auch für alle anderen Sätze Gültigkeit haben sollte, die bisher mit anderen Methoden gewonnen wurden als unser Satz, welches doch das Kennzeichen der „philosophischen“ Methode wäre. D. h. entweder ist die neue Methode nicht rein philosophisch, oder sie kommt gar nicht an ihren Untersuchungsgegenstand heran.

Gelangt man nun aber auf dem neuen Wege zu Ergebnissen, die denen der Spezialforschung widersprechen, so hat man entweder den Fehler bei Anwendung der bisher verwendeten spezialwissenschaftlichen Methode oder deren Unwissenschaftlichkeit überhaupt nachzuweisen. Gelingt das erste, so muß sich bei richtiger Anwendung der alten Mittel dasselbe Resultat erreichen lassen; in diesem Falle hätte dann also die „philosophische“ Art der Betrachtung wirklich einen heuristischen und einen Kontrollwert gehabt. Indessen ist auch nicht recht einzusehen, wie so etwas ohne Spezialisierung der Methode möglich sei. Wohl kann etwa der Philosoph mit Interessen für ein bestimmtes Sonderfach oder der philosophisch angeregte Spezialforscher, von allgemeinen Erwägungen ausgehend, zu gewissen Denkweisen kommen, die Kontrolle über einen qestimmten Einzelsatz gewähren; aber immer werden sich solche Methoden auf einen begrenzten Kreis von Erkenntnissen beziehen. Und damit verlieren sie den Charakter eigentlich philosophischer Methoden. — Nehmen wir endlich den Fall an, es gelänge, die Unwissenschaftlichkeit der seither angewandten Überlegungen nachzuweisen, so entsteht nunmehr die Aufgabe, die mit Hilfe

der bisherigen Methode abgeleiteten Ergebnisse einzeln auf ihre Richtigkeit hin zu prüfen. Wiederum ist auch hier dasselbe zu sagen, wie oben: daß eine derartige Untersuchung — auf der neuen Methode basierend — Einzelerwägungen erfordert. Bei dieser letzten Variante begründet also die neue Methode die Sonderwissenschaft neu.

Immer aber ist es Sache der Einzeldisziplin, nicht der Philosophie derartige Untersuchungen im Einzelfall zu werten und zu prüfen.

Dagegen ist es der Philosophie sehr wohl möglich und kann geradezu als ihre eigentliche Aufgabe bezeichnet werden: allgemeine Richtlinien festzulegen für jede Untersuchung, die den Charakter einer wissenschaftlichen beansprucht. Man kann in diesem Sinne die Philosophie als eine wissenschaftlich begründete Theorie des wissenschaftlichen Beweises überhaupt definieren.

Daraus geht hervor, daß jedes philosophische System folgenden Anforderungen genügen muß: Haben wir irgendeinen Satz gefunden, den wir als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen wählen wollen, so müssen 1. von ihm aus sämtliche auf jede Erkenntnis sich beziehenden Fragen gelöst werden können; 2. muß er selbst als Satz des Systems durch sich selbst begründet werden können.

Hierin liegt der Unterschied zwischen Philosophie und Fachdisziplinen. Letztere stellen, bewußt oder unbewußt, eine Reihe von Kernsätzen und Kernbegriffen an die Spitze, die durch sich selbst nicht wieder ableitbar sind. Die Philosophie dagegen — so notwendig sie einen Ausgangspunkt auch braucht — muß ihren Anfang in sich selber tragen; und solange dies nicht der Fall ist, ist sie nicht abgeschlossen.

Nehmen wir zum Beispiel die Philosophie des Materialismus, also das System mit dem Ausgangspunkt: Alles ist auf Materie und deren Bewegung zurückzuführen. — Die „nie parierbare Quart“ gegenüber dieser Richtung liegt in der Bemerkung, daß die Frage, was denn Materie eigentlich sei, nicht durch ihre eigene materialistische Stellung befriedigt werden kann.

Ein anderes Beispiel: Bei BERKELEY's System wird die Geschlossenheit nur durch eine Einschränkung des Gegenstandsbereiches vorgetäuscht. Das notwendig als vorhanden angenommene „Ich" wird ausdrücklich aus der Sphäre der Gegenstände unserer Erkenntnis ausgeschlossen[1]).

Als ein drittes Beispiel wollen wir endlich noch SPINOZA anführen, dessen Definitionen und Axiome als „richtig" — selbst im SPINOZA'schen Sinne als aus den Axiomen und Definitionen ableitbar — nicht ohne weiteres einzusehen sind.

Wir haben nun oben gezeigt (§ 6 f.), daß eine wissenschaftliche Theorie des wissenschaftlichen Beweises mit Hilfe des Herausschälens der bedingenden Elemente einer Erkenntnis erreicht werden kann. Nun ist es von jeher von besonderem Interesse gewesen — und mag auch wohl immer die Möglichkeit eines wirklich sachgemäßen Operierens mit diesen Gedanken abgeben — wenn man untersucht, wie sich diese Methode an einzelnen Wissenschaftsgebieten bewährt. Zur Durchführung dieser Untersuchung werden uns folgende Gedanken von Nutzen sein.

§ 9. Rein und empirisch.

Absolut und relativ. Subjektiv und objektiv.

Daß die erste Anregung und (in gewissem hier nicht näher zu erörterndem Sinne) auch der Erwerb aller unserer Erkenntnis dadurch geschieht, daß wir die Fähigkeit zur Wahrnehmung — die Sinne — haben, daran ist gar kein Zweifel. Jedes Etwas, welches die Eigenschaft, Gegenstand unserer Untersuchung zu sein, ausschließlich daraufhin gründet, daß es Gegenstand einer Wahrnehmung sein kann, und sonst nichts weiter, nennen wir „empfindbar".

Dieses Empfindbare ist, da seine einzige Bestimmungsmöglichkeit unsere Sinne sind, — wenn es mit Anderem verglichen wird, was bei seiner wissenschaftlichen Betrach-

---

[1]) BERKELEY *Principles (2)* § 2.

tung stets geschehen muß — von den Sinnen und deren Struktur abhängig. Es ist, wie wir kurz sagen: subjektiv.

Jede Erkenntnis nun, unter deren bedingenden Elementen sich Empfindbares befindet, nennen wir empirisch. Eine Erkenntnis, bei der ein solcher Bestandteil sich dagegen nicht finden läßt, nennen wir rein.

Daß es beide Arten von Erkenntnissen gibt, ist leicht einzusehen. Beispiele von empirischen Erkenntnissen sind alle die Sätze, in denen irgendwie auf Wahrnehmung zurückgegriffen wird. Etwa: „Der 124. Buchstabe in der zweiundvierzigzeiligen Gutenberg-Bibel ist schwarz.“ Der Beweis hierfür (oder hiergegen) — und auf ihn kommt es ja bei unserer Erörterung allein an — läßt sich nämlich nicht anders führen, als dadurch, daß man in einem Exemplar des zitierten Werkes den 124. Buchstaben ansieht.

Der bekannte Scherz, wonach ein Engländer den Begriff des Kamels erforscht, indem er eine Reise nach der Sahara unternimmt, während der Deutsche denselben Begriff aus dem metaphysischen Urgrund alles Seins herausdefiniert, hat demnach den trockenen Sinn, deß der Deutsche keine empirischen Erkenntnisse kenne, während der Engländer deren Erwerb mit Hilfe der Eigenschaft durchsetze, die man Spleen zu nennen pflegt. Jedenfalls ist die in diesem Scherze enthaltene Behauptung ein (allerdings auf höchst unsicheren Füßen stehender) empirischer Satz. Nachprüfen ließe sie sich nämlich nur auf Grund einer Statistik. Und der Grundgedanke jeder Statistik lautet: „Es sind wahrgenommen worden ...“. Empirische Erkenntnisse gibt es also sicher.

Sind nun aber nicht vielleicht alle Erkenntnisse empirisch? Gibt es wirklich solche, unter deren wissenschaftlich bedingenden Bestandteilen kein einziger empfindbar ist? Läßt sich die Annahme reiner Erkenntnis mit dem Satze in Einklang bringen, daß alle unsere Erkenntnis ihren Ursprung vom Empfindbaren aus nehme?

Es liegt auf der Hand, daß dieser letzte Einwand nicht stichhaltig ist. Die Frage, ob eine Erkenntnis rein sei oder nicht, betrifft die Beschaffenheit und nicht die Ent-

stehung. Und bevor man überhaupt nur fragen kann: „Wie ist das entstanden?“, muß man sich vernünftigerweise doch erst einmal klarmachen, was denn dieses „Das“ eigentlich ist. Wer garantiert sonst dafür, daß nicht am Schluß einer sehr langen und schwierigen Untersuchung womöglich jemand sagt: „Sehr schön! Nur haben Sie leider das nicht untersucht, was Sie untersuchen wollten. Was Sie untersuchen wollten, ist nämlich so und so beschaffen, was Sie Ihrer Darlegung zugrunde legten, hat aber die und die Eigenschaften. Sie müssen also nochmals von vorne anfangen.“ Wir drücken dies kurz so aus: Soll die genetische Untersuchung sicher fortschreiten, so muß ihr eine systematische vorangehen.

Durch diese Untersuchung ist allerdings zunächst nur gezeigt, daß es reine Erkenntnisse geben kann, und daß wir keinen von vornherein unmöglichen Schritt unternehmen, wenn wir nun ein Beispiel anführen und seine „Reinheit“ zu erweisen suchen.

In § 3 haben wir nachgewiesen, daß der Gedanke von der Möglichkeit eines unbedingt einheitlichen Planes lediglich seinen eigenen Inhalt als bedingendes Element enthält. Nun ist der Inhalt dieses Satzes aber nicht Gegenstand der Wahrnehmung und kann es auch nicht sein. Wäre er es, so müßte sich ein bedingender Bestandteil angeben lassen — und das kann nur er selbst sein — der empfindbar, folglich durch die Natur der Sinne bedingt wäre. Das wäre aber gleichbedeutend damit: die Möglichkeit eines unbedingt einheitlichen Planes wäre nicht nur in Frage gestellt, sondern sogar verneint; und dieser Satz ist unwissenschaftlich.

Das konsequente Ausdenken des All-Empirismus führt also zur Verneinung des strengen Wissenschaftsgedankens; es gäbe dann nur noch ein Sammelsurium von Kenntnissen.

Wir führen zum Schluß dieser Betrachtungen über unsere Methode noch eine Verschärfung des Sprachgebrauches durch. Wir wollen solche Erkenntnisse, die als wissenschaftliche Bestimmungen reiner Erkenntnisse in Frage kommen, absolute oder unbedingt richtige nennen. Sie dürfen

als solche ihrem *Inhalte* nach nichts Empfindbares enthalten. Erst recht müssen aiso ihre wissenschaftlichen Bestimmungen frei davon sein. Sie sind sonach *reine* Erkenntnisse, und zwar *reine Formen*. Ob es derartige Erkenntnisse, (abgesehen von dem Gedanken der Wissenschaft) überhaupt gibt, soll zunächst noch vollkommen dahingestellt bleiben. Haben wir aber solch eine absolut richtige Erkenntnis, so muß sie auch für jeden Satz bestimmend sein, der auf Empfindbares bezogen ist, sie muß für die ganze „Empfindungswelt" — die Gesamtheit alles dessen, was über Empfindbares ausgesagt werden kann — gelten können, da sie ja in ihrem Wissenschaftscharakter nicht von solchen Elementen bestimmt wird. In diesem Sinne werden wir eine *unbedingt richtige* Erkenntnis auch eine *allgemeingültige* nennen.

Umgekehrt wird jede *empirische* Erkenntnis als *relativ* und *begrenzt gültig* zu bezeichnen sein. Denn da sie unter ihren bedingenden Bestandteilen Wahrnehmbares, also durch unsere begrenzten Sinne Bedingtes enthält, ist sie in ihrem Bestande von der Anerkennung dieses vergänglichen Elementes abhängig, mithin rechtfertigt sich die eben gegebene Bezeichnung. Andererseits ist festzustellen, daß die empirischen Erkenntnisse die einzige Möglichkeit geben, durch die das Empfindbare in eine Erkenntnis *wissenschaftlich* eingefügt werden kann. Freilich ist dabei zu berücksichtigen, daß Wahrnehmungen niemals allein einen Begriff — die Einheit der *bleibenden* Bestimmungen — ausmachen können. Nun erfordert aber der Gedanke der Wissenschaft, daß die begriffliche Untersuchung bei seiner Anwendung jeder anderen vorangehen müsse. Denn sie gebietet unbedingte, also sicher auch *bleibende* Einheit, d. h. eine solche, die von dem Wandel der Zeiten nicht berührt werde. Wie läßt sich das Wahrnehmbare, seinem Begriffe nach also Vergängliche in solch eine bleibende Einheit bringen? Das ist die Frage, die zur Untersuchung der *empirischen* Erkenntnis drängt.

Schon oben haben wir eine Gruppe von empirischen Erkenntnissen kennen gelernt, die „subjektiven". Ihre

Eigenart ist die, daß sie vollkommen von den Sinnen abhängen — enthalten sie doch auch in ihren bedingenden Bestandteilen nichts anderes, als Gegenstände der Wahrnehmung. Unternehmen wir es nun, sie uns nach irgendeinem Plane geordnet vorzustellen! Dann ist zu sagen, daß ein solcher, d. i. also dasjenige, wodurch sie gegenüber der Gesamtheit aller Erkenntnis bestimmt werden, nie ein unbedingt einheitlicher sein kann. Vielmehr kommen, wenn es sich wirklich um subjektive Erkenntnisse handelt, wiederum nur Begrenztheiten, nämlich Wahrnehmungen als bestimmende Richtlinien des Planes in Frage. Mit anderen Worten: Bloß subjektive Erkenntnisse sind stets unwissenschaftlich. Ihnen kann niemals das Adelsprädikat der Wissenschaftlichkeit zugestanden werden.[1])

Dagegen ist zu bemerken, daß das nicht ohne weiteres mit jedem relativen Satze der Fall zu sein braucht. Da nämlich eine solche Erkenntnis, als empirische, unter ihren bedingenden Elementen reine enthalten kann, also solche, die nicht von Empfindbarem abhängen, so ist sehr wohl denkbar, daß diese reinen Elemente einem unbedingt einheitlichen Plane entnommen sein können. Durch sie wäre dann auch die fragliche relative Erkenntnis in ihn eingegliedert; mithin steht nichts im Wege, sie den wissenschaftlichen Erkenntnissen zuzuordnen. Wir brauchen für eine solche Art von relativer Erkenntnis die Bezeichnung, daß sie objektiv gültig sei.

Betrachten wir also eine Erkenntnis vom philosophischen Standpunkt aus, so heißt das soviel, wie sie als Exempel für eine Methode nehmen, die für jede Erkenntnis gültig sein soll. Dasjenige also, was eine philosophische Methode von anderen unterscheidet (und sie vor diesen auszeichnet), ist ihre Allgemeingültigkeit. Wenn wir fernerhin den

---

[1]) Da es manchmal üblich ist, Erkenntnis mit wissenschaftlicher Erkenntnis zu identifizieren, wobei dann von „subjektiven Erkenntnissen" nicht die Rede sein kann, so wollen wir ausdrücklich bemerken, daß wir Erkenntnis im weitesten Sinne des Wortes nehmen, soweit sich nicht psychologische Vorstellungen damit verbinden.

Problemkreis herausschneiden, der sich mit der Untersuchung der Wissenschaftlichkeit der Erkenntnis beschäftigt, und diesen philosophisch durchforschen, so bietet sich uns als einzige Möglichkeit hierfür die Aufstellung eines Systems reiner Formen dar.

Die Frage nach der Wissenschaftlichkeit der Erkenntnis findet also dann und nur dann eine wissenschaftlich begründete Lösung, wenn es gelingt, die reinen bedingenden Elemente der Erkenntnis erschöpfend herauszuarbeiten und als solche darzutun.

Wir haben schon einmal (§ 8 a. E.) angedeutet, daß es interessant sei, diese Methodik an einzelnen Wissensgebieten zu erproben. Wir gehen hier sogar noch einen Schritt weiter. Uns erscheint es nicht nur interessant, sondern sogar notwendig, sich ein derart fest umgrenztes Gebiet vorzulegen, will man nicht ins Blaue hinein philosophieren.

Wir haben uns nun als ein solches Gebiet die Sätze ausgesucht, die sich mit dem Begriff der Zahl und den grundlegenden Erörterungen in der Zahlenlehre beschäftigen. Aus diesem Erkenntnisbereich die reinen bedingenden Elemente herauszuarbeiten und dadurch zur klaren Einsicht in dem Zusammenhang der Zahlenlehre mit dem Ganzen der Erkenntnis beizutragen, ist der Hauptzweck nachstehender Untersuchung. Es war in dieser Hinsicht ein ziemlich umfangreiches Material zu bewältigen, selbst bei der Beschränkung, die wir uns auferlegt haben: nur die Darlegungen zu berücksichtigen, die im Laufe des letzten halben Jahrhunderts unternommen wurden um über die Grundlagen der Zahlenlehre Licht zu verbreiten. Das Wort „Grundlagen" ist sicher recht dehnbar; wir aber betrachten alle diese Versuche unter dem einen Gesichtspunkt: Inwiefern sind sie geeignet, uns Auskunft über die eine Frage zu geben: „Welche Merkmale unterscheiden das, was durch das Wort ‚Zahl' bezeichnet wird, von anderen Begriffen?" oder kürzer: „Was ist Zahl?"

Demgemäß ist die Anordnung, in der alle diese Betrachtungen dargestellt werden, weder eine streng historische,

noch die bei den mathematischen Entwicklungen übliche. Ihr leitender Grundgedanke ist vielmehr der, daß zunächst die einzelnen Abarten des Zahlbegriffs betrachtet werden (abgesehen von den transfiniten Zahlen); anfangend mit der (in diesem Sinne) weitestumfassenden, den komplexen Zahlen, schreiten wir fort zu den reellen, rationalen, natürlichen Zahlen.

Haben wir uns diesen Überblich verschafft, halten wir also die Teile des Zusammengesetzten in der Hand, so können wir an den erkenntnistheoretischen Aufbau gehen.

II. Kapitel.

Mathematische Analyse der Zahlen.

A. Die komplexen Zahlen.

§ 10 Interpretation durch Geometrie.

Wir gehen bei der Darstellung der komplexen Zahlen von der elementaren Gleichung $x^2 + 1 = 0$ aus. Das Bestreben, Werte für x zufinden, die diese Gleichung ebenso befriedigen, wie etwa der Wert $x = 1$ die Gleichung $x^2 - 1 = 0$, führte zunächst zu dem „Symbol" $i = \sqrt{-1}$. Multiplizierte man nämlich dieses Zeichen entsprechend der Formel $(\sqrt{a})^2 = a$, so hatte man in der Tat $i^2 + 1 = 0$. Nun nahm man aber zunächst an, daß sich mit dem Zeichen $\sqrt{a}$ dann und nur dann ein Sinn verbinden lasse, wenn man ihm irgendeine Größenbedeutung beilegen könne. Man sah sich also nach einer Größe um, die dem neuen Symbol $\sqrt{-1}$ ebenso entspräche, wie etwa die Schulden den negativen Zahlen $-a$.[1])

---

[1]) Vom Standpunkt einer späteren Generation aus schildert DUREGE treffend diese Auffassung: „Die Ansicht von der Unmöglichkeit der imaginären Größen ist eigentlich von einem Verkennen des Wesens der negativen, gebrochenen und irrationalen Größen ausgegangen. Da nämlich die Anwendung dieser mathematischen Begriffe auf Geometrie, Mechanik, Physik und zum Teil selbst im bürgerlichen Leben sich so leicht und so von selbst darbot, ja ohne Zweifel in vielen Fällen die Veranlassung zur Untersuchung dieser Größen wurde, so kam es, daß man in irgendeiner dieser Anwendungen das wahre Wesen dieser Begriffe und ihre wahre Stellung im Gebiete der Mathematik zu finden glaubte. Bei den imaginären Größen

Hierbei lag offensichtlich meist die EULER'sche Definition der Größe und der Mathematik als messender Größenlehre zugrunde: „Erstlich wird alles dasjenige eine Größe genannt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon abziehen läßt.“ „Es gibt also sehr viele verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl herzählen lassen; und daher entstehen die verschiedenen Teile der Mathematik, deren ein jeder mit einer besonderen Art von Größen beschäftigt ist, indem die Mathematik überhaupt nichts anderes ist, als eine Wissenschaft der Größen, und wie man Mittel ausfindig machet, wie man dieselben ausmessen soll.“ „Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmessen, als daß man eine Größe von eben derselben Art als bekannt annimmt, und das Verhältnis anzeiget, worinnen eine Größe derselben Art gegen derselben stehet.“[1])

Man suchte also nach einer Größe, die durch $\sqrt{-1}$ bestimmt werden könne, d. h. zu einer anderen Größe, in dem Verhältnis $\sqrt{-1} : 1$ stehe. Daß man sich, da die gewöhnliche tagtägliche Erfahrung versagte, zunächst an die Geometrie wandte, ist nicht verwunderlich; galt sie doch noch immer als „die Königin unter den Wissenschaften“. Es ging also zunächst darum, ob sich geometrische Größen in der verlangten Art interpretieren ließen, und man schloß aus dem Gelingen oder Nichtgelingen dieser Bestrebungen auf die Heimatberechtigung des Symbols $i = \sqrt{-1}$ in der Mathematik überhaupt.

Wir wollen im folgenden aus den vielen Versuchen, die in dieser Hinsicht gemacht wurden, drei skizzieren, überall uns mit dem begnügend, was für unsere Zwecke in Betracht kommt.

---

lag nun eine solche Anwendung nicht so nahe, und wegen der mangelnden Kenntnis derselben glaubte man, die imaginären Größen in das Bereich der Unmöglichkeit verweisen, ihre Existenz bezweifeln zu müssen“. DUREGE *Elemente (26)* S. 3.

[1]) EULER *Algebra (27)* I, Nr. 1—3.

Diese drei Interpretationsweisen[1]) werden am besten durch die drei Namen gekennzeichnet: ARGAND, HAMILTON, HOUEL. Um gleich das ihnen allen Gemeinsame hervorzuheben: es ist der neu auftretende Begriff der durch Länge und Richtung bestimmten geometrischen Strecke. Unterschiedlich ist aber die Art, wie dieser Begriff von ihnen behandelt und für das gegebene Problem verwertet wird.

ARGAND führt diesen neuen Begriff ganz klar und bestimmt in seine mathematischen Betrachtungen ein, um durch ihn den der komplexen Größe sicherzustellen: „AB bezeichnet eine Linie von bestimmter Länge, parallel einer gewissen Richtung. Ihr Sinn ist ein bestimmter, er ist aus den beiden Möglichkeiten gewählt, die die Richtung darbietet. Ihr Anfangspunkt ist irgendein Punkt ... Man wird sie „Linien mit Richtung" oder einfacher ‚gerichtete Linien' nennen".[2]) ARGAND hat aber trotz der geometrischen Interpretation das Bestreben, in seinen Erörterungen Gesichtspunkte vorzutragen, die über die Geometrie hinaus auch für die Arithmetik und Algebra Geltung haben; denn er bestimmt: „Diese Linien können selbst Ausdruck für Größen einer anderen Art sein."[3]) Daß aber diese gerichteten Linien tatsächlich komplexe Größen im oben festgelegten Sinne des Wortes sind, wäre nunmehr zu zeigen.

Wir bedienen uns zu diesem Zweck gleich der kurzen und konzisen Ausdruckweise, die J. W. FRANÇOIS eingeführt hat.[4]) Er bezeichnet die Strecke von der Länge p und der Richtung q durch p_q. So gelingt es, eine Streckenrechnung zu entwickeln, deren Grundzüge wir später gelegentlich der Betrachtung des HOUEL'schen Versuches kennen lernen werden[5]); eine Additions- und Multipli-

---

[1]) Die hier durchgeführte strenge Scheidung von Interpretation durch und Interpretation der Geometrie haben wir nachträglich bei STOLZ bestätigt gefunden. STOLZ *Arithmetik (103)* II S. 30f.

[2]) ARGAND *Essai (1)* S. 11.

[3]) ARGAND *Essai (1)* S. 10.

[4]) Vgl. die im Anhang zu ARGAND *Essai (1)* beigegebene Schrift von J. W. FRANÇOIS *Nouveaux principes*.

[5]) S. 41 d. A.

kationsmethode der „gerichteten Strecken“ wird aufgebaut. Hierbei zeigt sich dann, daß sich eine Strecke finden läßt — ARGAND bezeichnet sie mit 1_d — die für x gesetzt, die Proportion $1 : x = x : -1$ befriedigen soll. FRANÇOIS würde diese Strecke mit $1_{\frac{\pi}{2}}$ oder $1_{\frac{3\pi}{2}}$ bezeichnet haben. Wenn diese konsequente Schreibweise überall angewandt wird, so sieht man, daß die aufgestellte Proportion eigentlich garnicht gelöst ist, sondern folgende: $1_\pi : 1_x = 1_x : 1_0$.

Inwieweit diese Änderung nur äußerlich ist, oder ob dadurch eine wirkliche Kritik an dem Grundgedanken ARGAND'S angedeutet wird, werden wir später noch sehen.

ARGAND und seine — bewußten oder unbewußten — Nachahmer sind gezwungen, wie ja aus der Schreibart klar hervorgeht, ihren Entwicklungen ein Koordinatensystem und eine Anfangsrichtung zugrunde zu legen. An diesen werden dann alle „gerichteten Strecken“ orientiert, der Länge und der Richtung nach.

Ausdrücklich vermieden dagegen wird die Anwendung von Koordinatensystemen bei einer gewissen Ausdeutung der HAMILTON'schen Quaternionen.[1]) Man kann ja die Quaternionen in zweierlei Weise auffassen. Die heute bekannteste Darstellung einer Quaternion dürfte die als Summe von vier Bestimmungsstücken sein:

$$q = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4,$$

wozu dann noch bestimmte Regeln über die multiplikative Verknüpfung der Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4 treten[2]). Auch diese abstrakte Auffassung hatte ursprünglich einen mehr geometrischen Sinn. Es wurde nämlich festgesetzt:

$$q = W + ix + jy + kz,$$

wobei $ix + jy + kz$ als räumlicher Vektor mit den Komponenten x, y, z gedeutet wurde, während W eine außerräumliche Größe — etwa eine Zeitgröße — bezeichnete.

---

[1]) Vgl. TAIT *Treatise (108)* S. 1—4, sowie die einleitenden Erörterungen in TAIT-KELLIAND *Introduction (107)*.

[2]) Diese Deutung scheint uns von der später zu erörternden GRASSMANN'schen „Ausdehnungslehre” kaum abzuweichen. Ihre Beurteilung ist also dort (S. 51ff.) zu suchen.

Wir haben es aber hier mit einer anderen geometrischen Fassung des Quaternionenbegriffes zu tun; und zwar nicht mit einer aus der abstrakten Definition abgeleiteten, geometr schen Deutung analytischer Operationen, sondern mit einer ursprünglichen Auffassung der Quaternion als eines rein geometrischen Begriffes.

Sie geht von der Aufgabe aus, einen Vektor α (Strecke im Raum, gegeben ihrer Länge und Richtung nach) mit einem anderen Vektor β zur Deckung zu bringen. Hierzu sind vier Bestimmungsstücke notwendig. Zunächst zwei Winkel, um die Ebene der beiden Vektoren im Raume eindeutig festzulegen; sodann ein Winkel, der den Unterschied der Richtungen von α und β angibt, also der Winkel, um den α gedreht werden muß, um mit β gleiche Richtung zu erhalten. Endlich noch das Verhältnis der Längen von α und β. Faßt man nun die geometrische Operation, die nötig ist, um den Vektor α mit β zur Deckung zu bringen, als Multiplikation, setzt man also zur Bezeichnung der Aufgabe, einen Vektor α in einen anderen β zu verwandeln, das Symbol $q\alpha = \beta$, so ist $q = \frac{\beta}{\alpha}$ durch die oben angegebenen vier Stücke eindeutig bestimmt.[1])

Man sieht sofort, daß q hier von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist. Keine Richtung des Raumes wird hierbei als imaginär von vornherein besonders ausgezeichnet, keine als reell. Sie können alle in gleicher Weise als imaginär oder reell bezeichnet werden.

Die Gleichung nun, durch die die imaginäre Einheit bestimmt wird, stellt sich in der Quaternionentheorie, wie folgt dar: Gegeben sind zwei Vektoren von gleicher Länge aber entgegengesetzter Richtung. Ihre Länge werde allen Messungen der Untersuchung als Einheit zugrunde gelegt. Gesucht wird nun ein Vektor x, so daß die Quaternion $\frac{1}{x}$ gleich der $\frac{x}{-1}$ ist. (Der Zeichenwechsel soll den Richtungswechsel andeuten.) Das Ergebnis ist: x ist ein

---

[1]) TAIT *Treatise (108)* S. 31f. TAIT-KELLIAND *Indroduction (107)* S. 15f.

Vektor, der in derselben Ebene liegt, wie die beiden gegebenen Vektoren, und dessen Richtung gleichviel von jeder der gegebenen verschieden ist.

Indessen, mag man nun bestimmte Koordinaten annehmen müssen oder nicht, gelöst wird das Problem, wie es am Anfang dieses Paragraphen gestellt wurde, doch nur per analogiam oder für einen Spezialfall.

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ wird durch eine Repräsentativgleichung $(x_y)^2 = 1_\pi$ ersetzt und es wird dann auf Grund der Regeln für die Streckenrechnung $x = 1$ und $y = \frac{\pi}{2}$ gefunden. Die ursprüngliche Gleichung wird also nur für den Fall gelöst, daß es gestattet ist, $1 = 1_0$, $-1 = 1_\pi$, also $\sqrt{-1} = 1_{\frac{\pi}{2}(2n+1)}$ zu setzen. Dabei muß man aber stets im Auge behalten, daß die p_q eben „gerichtete Strecken" sind. Solange daher nicht die Identität von Vektoren und komplexen Werten ganz allgemein dargetan ist — und in dieser Formulierung gilt die Kritik auch für die geometrische Quaternionentheorie — kann man in den dargelegten Untersuchungen nichts anderes, als ein Ersetzungsverfahren erblicken, das zur Lösung eines geometrischen Unterfalles der komplexen Werte führt. Man kann ihnen daher in der analytischen Geometrie einen streng deduktiven, in der reinen Analysis aber nur einen heuristischen Wert zuschreiben.

Einen etwas anderen Weg, als den eben geschilderten, schlägt HOUEL ein. Bei ihm tritt neben den Begriff der Größe, ja diesen zunächst überragend, der der Operation in den Vordergrund.[1]) Zum mindesten — kann man sagen — benutzt er letzteren bei seinen allgemeinen Erwägungen als Sprungbrett, um mit seiner Hilfe einen allgemeinen Begriff der komplexen Größe zu erreichen.

HOUEL will nämlich zeigen, daß es möglich ist, Operationen einzuführen, die (auch) auf reelle Größen ange-

---

[1]) Ähnliche Gedanken, wie wir sie HOUEL's *Théorie (50)* entnehmen, finden wir auch in HOUEL *Cours (52)*, namentlich aber in HOUEL *Du rôle (51)*.

wendet werden können und doch erheblich weiter führen, als die in der Arithmetik der reellen Zahlen üblichen. Um diesen Unterschied möglichst klarzustellen, wird zunächst einmal festgelegt, was die Redewendung „Unmöglichkeit eines Problems" bedeute. Dadurch soll zugleich ins rechte Licht gesetzt werden, was es eigentlich heißt, es sei „unmöglich", eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ zu finden. HOUEL erörtert allgemein zwei Fälle: „Man muß zwischen der absoluten Unmöglichkeit eines Problems unterscheiden und derjenigen in diesem oder jenem Fall, sobald es nämlich deren mehrere aufweisen kann."[1])

Der erste Fall tritt für ein Problem dann ein, „wenn das Resultat gewisse Bedingungen nicht erfüllt, die man nicht durch die Gelichungen des Problems ausdrücken kann. Das Problem ist z. B. unmöglich, wenn se ne Natur es verlangt, daß seine Lösung eine ganze Zahl sei, und die Rechnung nur ein gebrochenes Resultat liefert."

Der zweite für uns wichtigere Fall der relativen Unmöglichkeit ist durch folgenden Tatbestand gegeben: „Solange man sich an die ursprünglichen Definitionen (der Operationen) hält, können die Rechenregeln nicht alle Fälle ein und derselben Aufgabe erledigen; und wenn die Rechenregeln gerade für den einen dieser Fälle erweitert sind, führen sie für die anderen zu Unmöglichkeiten. Man wird dann zugleich die Idee der Größe und die Oparationsdefinitionen derart zu erweitern suchen, daß die Unmöglichkeit ausgemerzt wird und eine einzige Formel die Lösung aller Fälle in sich schließt."[2])

Hierbei stützt sich HOUEL auf eine Definition der Algebra, die diese Disziplin vollkommen in die allgemeine logische Theorie der Operationen als Spezialfall e nfügt: „Die Algebra beschäftigt sich einzig mit der Zusammenstellung von Operationen, ohne sich über ihre Bedeutung und ihre Natur zu beunruhigen. Sie gibt die Wege an, eine Zusammenstellung von Operationen durch eine äquivalente

---

[1]) HOUEL *Théorie (50)* S. 4.
[2]) HOUEL *Théorie (50)* S. 3.

zu ersetzen; aber sie behandelt keineswegs die Art, diese Operationen zu verwirklichen."[1]) Nur müssen gewisse Prinzipien für die Operationen festgelegt werden, die man geradezu als deren Definitionen betrachten darf; im übrigen ist jede Definition von Operationen erlaubt, die sich mit diesen Prinzipien verträgt.[2]) „Nichts steht also im Wege, den Fundamentaloperationen, die sich auf diese oder jene Größenart beziehen, ganz willkürliche Definitionen zu geben, vorausgesetzt, daß diese Definitionen sich mit den in Frage stehenden Prinzipien vertragen."[3])

Durch solche „willkürliche" Definitionen soll nun das Problem $x^2 + 1 = 0$ seiner Lösung zugeführt werden. Die Gleichung ist, wie zunächst festgestellt wird, im Bereich der algebraischen Größen nicht lösbar, d. i. der Größen, die einzig und allein durch die gewöhnliche algebraische Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division verbunden werden können. Denn hierbei ist eben $x \cdot x$ immer eine positive Größe. Da aber die Gleichung sonst keineswegs eingeschränkt ist, d. h. von ihrem Resultat keinerlei besondere Eigenschaften erfordert werden (auch nicht die, „algebraisch" zu sein), so liegt hier der Fall einer nur relativen Unmöglichkeit des Problems vor. Man kann daher versuchen, diese Aufgabe auf dem vorhin angedeuteten Wege durch Erweiterung der „Idee der Größe" und der Operationsdefinitionen zu erledigen. Wie verschafft sich nun HOUEL die Lösung? „Man erreicht dies Ziel dadurch, daß man in die Algebra neue Operationszeichen einführt, die auf geometrische Betrachtungen gegründet sind. Diese bieten einen weiteren Spielraum und mannigfaltigere Hilfsmittel, als die geometrischen Be-

---

[1]) HOUEL *Théorie (50)* S. 2, ähnlich S. 11.

[2]) SolchePrinzipien sind u. a.: „Eine Summe ändert sich nicht, wenn man die Reihenfolge ihrer Teile vertauscht (Prinzip der Addition). — Die Subtraktion ist die inverse Operation der Addition. — Ein Produkt ändert sich nicht, wenn man die Reihenfolge seiner Faktoren vertauscht (Prinzip der Multiplikation)." HOUEL *Théorie (50)* S. 3.

[3]) HOUEL *Théorie (50)* S. 3.

trachtungen, die man gewöhnlich als Ausgangspunkt nimmt.“ Das klingt allerdings so, als ob nun eine vollkommen neue Algebra entwickelt werden sollte. Indessen wird dies sogleich wieder umgebogen: „Jede geometrische Konstruktion entspricht mehreren Zusammenstellungen arithmetischer Operationen mit den Zahlen, die durch die verschiedenen Elemente der Konstruktion dargestellt werden.“[1]) So entspricht z. B. die „Konstruktion eines Parallelogramms“ der Auflösung einer Kraft in ihre Komponenten. Und es handelt sich, wie wir gleich sehen werden, in der Tat nicht um die Einführung vollkommen neuer Operationszeichen und der durch sie bezeichneten Operationen, deren Zusammenhang mit den bisher bekannten gar nicht oder nur durch die Objekte gegeben ist, auf die sich beide beziehen können. Vielmehr wird eine Verallgemeinerung der algebraischen Operationen angestrebt. „Diese Verallgemeinerung erhält man, wenn man die algebraischen Größen und Operationen durch geometrische ersetzt.“[2])

Indessen ist damit noch nicht die Verbindung zwischen Algebraischem und Geometrischem dargetan. Um diese herzustellen, verläßt HOUEL den bisher eingenommenen Standpunkt unmerklich. Er führt nämlich neue Größen ein, die aber nicht durch neue Operationen bestimmt werden, sondern der geometrischen Anschauung entlehnt worden sind. Es sind dies die uns bekannten „gerichteten Strecken“, wie wir sie bei ARGAND und FRANÇOIS getroffen haben. Zunächst wird gezeigt, daß sich sämtliche algebraischen Operationen an den nach Größe und Richtung bestimmten Strecken einer Geraden ausführen lassen. Die Verallgemeinerung wird dann dadurch erzielt, daß man von der Geraden in die Ebene übergeht. Und nun zeigt es sich, daß die geometrischen Operationen, denen die „gerichteten Strecken“ in der Ebene unterworfen werden können, mit den algebra-

---

[1]) HOUEL Théorie *(50)* S. 2.
[2]) HOUEL *Théorie (50)* S. 4.

ischen der Strecken auf einer Geraden einige Grundprinzipien derart gemeinsam haben, daß HOUEL daraus das Recht ableitet, jenen dieselben Namen, wie diesen zu geben.[1])

So ist z. B. das Ziehen der Diagonale in einem Parallelogramm mit den Seiten r_p und $r'_{p'}$ als Addition der Seiten zu bezeichnen und demgemäß durch das Zeichen $r_p + r'_{p'}$ darzustellen. Eine andere Konstruktion liefert die geometrische Verallgemeinerung der Multiplikation, ihre Bezeichnung lautet $r_p \cdot r'_{p'} = r \cdot r'_{(p + p')}$. Leitet man dann noch $m \cdot (r_p) = (m \cdot r)_p$ ab — m ist hierbei algebraische Größe — so folgt $r_p = r \cdot (1_p)$. Da man nun endlich jede gerichtete Strecke v_w in ihre Kartesischen Komponenten x_0 und $y_{\frac{\pi}{2}}$ auflösen kann, deren Summe dann v_w ist, so ergibt sich als Resultat dieser Betrachtung, daß jede gerichtete Strecke der Ebene in der Form

$$v_w = x \cdot (1_0) + y \cdot \left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)$$

darstellbar ist. Führt man hierfür die übliche Schreibweise $x + y \cdot i$ ein, so ist in der Tat $i^2 = -1$.

Aber auch hier ist derselbe Einwand zu erheben, wie früher. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist nur lösbar, wenn x und 1 als geometrische Größen, als „gerichtete Strecken" aufgefaßt werden können. Daß man jede gerichtete Strecke als Repräsentant einer algebraischen oder geometrischen Größe auffassen kann, und daß man Operationen für sie festlegen kann, die die Grundprinzipien der gewöhnlichen Operationen in sich schließen, obwohl sie rein geometrisch gefaßt werden können, — alles das ist ganz klar und unbestreitbar. Aber es fehlt die Umkehrung! Läßt sich jeder komplexe Wert als geometrische Größe und jede Operation mit diesen als geometrische Operation auffassen? Man kann die Wichtigkeit dieses Einwandes bei dem Begriff der „algebraischen" Strecken ganz deutlich sehen, sowie wir die Frage stellen: Machen die gerichteten Strecken

---

[1]) Vgl. hierüber und über das folgende HOUEL *Théorie (50)* S. 21ff.

einer Geraden den ganzen Umfang des Begriffes der algebraischen Größe aus, oder sind sie nur ein Teilgebiet davon? Daß sie das ganze Gebiet ausmachen sollten, ist kaum anzunehmen, da sich noch allerhand andere, den algebraischen Operationen gehorchende Größen aufzeigen lassen z. B. die reellen Zahlen; nehmen sie aber nur ein Teilgebiet ein, so ist die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ in allen den Fällen nicht lösbar, in denen x und 1 als verschieden von algebraischen Strecken genommen werde n müssen. Und ebenso ist es mit der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in allen den Fällen, in denen (x und) 1 nicht geometrisch faßbar ist (sind), also nicht durch gerichtete Strecken ausgedrückt werden kann (können).[1])

Und was die Operationen selber anlangt, so wird es sehr fraglich, inwieweit ihr geometrischer Charakter überhaupt noch festzustellen ist, sowie sich größere Komplikationen bei ihrer Zusammenstellung ergeben. Wir wählen dazu folgendes einfache Beispiel.

Es wird von HOUEL der Ansatz gemacht:

$$1_p = \text{ces}\, p + i \sin p = 1 + \frac{i\,p}{1!} - \frac{p^2}{2!} - \frac{i\,p^3}{3!} + \frac{p^4}{4!} + \frac{p}{5} \ldots$$

Hier liegt der erste logische Sprung in der Reihenentwicklung. Zwar ist vorher zu beweisen versucht worden, daß alle Regeln der Differentialrechnung, soweit sie nur von den Regeln der Addition und Subtraktion abhängen, in Gültigkeit bleiben, auch wenn geometrische Größen und Operationen eingeführt werden.

Aber 1. ist der Beweis selber sehr anfechtbar, da er nur mit algebraischen Größen arbeitet, und geometrische, streng genommen, gar nicht vorkommen; 2. tritt bei unserem Beispiel noch die Multiplikation hinzu und sogar noch die Division; 3. (und das dürfte am schwersten ins Gewicht fallen) kommen hier Konvergenzbetrachtungen ins Spiel — oder müßten doch hereingezogen werden, um das sinnvolle

---

[1]) Z. B. die Geldmenge zu finden, deren Maßzahl eine Quadratzahl ist, und die, um die Geldeinheit vermehrt, nichts ergibt. Der Ansatz liefert, wenn G die Geldeinheit ist: $G(x^2 + 1) = 0$. Hierbei müssen x und 1 Zahlen und können nicht gerichtete Strecken sein. Die Gleichung ist also mit den Mitteln von HOUEL nicht angreifbar.

Auftreten wenigstens der Reihe $i \cdot \sin p$ zu rechtfertigen, und von solchen war überhaupt gar nie die Rede. Es müßte z. B. erörtert werden: was bedeutet es eigentlich, eine unendliche Reihe mit dem Faktor i zu multiplizieren? Bleibt sie dann noch konvergent? Und kann man diese Reihe dann noch zu einer anderen addieren? Einer Größe, die sich so erheblich von den reellen unterscheidet, daß ihr Quadrat negativ ist, kann man doch auch zutrauen, daß sie eine konvergente reelle Reihe zu einer divergenten „geometrischen" (im HOUEL'schen, nicht dem gewöhnlichen Sinne) macht.

Nun aber geht es weiter: Führt man i^2 für -1 ein, so lautet die Reihe

$$1_p = 1 + \frac{ip}{1!} + \frac{(ip)^2}{2!} + \frac{(ip)^3}{3!} \dots$$

Das wird nun verglichen mit

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

mit dem Ergebnis: die Entwicklung von $1_p = \cos p + i \cdot \sin p$ ist identisch mit der von e^x, „sobald man x durch $i \cdot p$ ersetzt". Es fragt sich nun aber sehr, ob denn das so ohne weiteres gestattet ist. Darf man in einer unendlichen Reihenentwicklung eine Zahl durch das Produkt einer Zahl mit einer gerichteten Strecke „ersetzen"? Schwerlich dürfte sich das rein geometrisch erweisen lassen, auch nicht durch Einführen geometrischer Operationen.

Dagegen ist unzweifelhaft zuzugeben, daß es durch die Einführung gerichteter Strecken und geometrischer Operationen wirklich gelungen ist, Größengebiete aufzuzeigen, die zwei wichtige Eigenschaften besitzen.

Erstens enthalten sie Gebiete in sich (Strecken einer Geraden), deren Größen den reellen Zahlen gleichartig sind, insofern sie nämlich alle und nur alle arithmetischen Eigenschaften besitzen, die den reellen Zahlen eigen sind. Zweitens aber lassen sich durch die neuen Größen Aufgaben lösen, denen die Strecken einer Geraden nicht gewachsen sind. Unter diesen befindet sich die Aufgabe $(x_y)^2 = \left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)$, die der Aufgabe $x^2 = -1$ ebenso entspricht, wie $(x_y)^2 = (1_0)$ der Gleichung $x^2 = +1$.

Die eben geschilderten Untersuchungen haben also sich als glänzend durchgeführte und wohlgelungene Exemplifikation der Existenz geometrischer Größen erwiesen, die man mit gutem Rechte komplexe Größen nennen kann. Fraglich blieb nur noch, ob mit diesen geometrischen Größen der gesamte Vorrat dessen erschöpft ist, was eine Gleichung von der Form $x^2 = -1$ zu lösen vermag, mit anderen Worten, ob hierin das Zeichen 1 stets als Bezeichnung für eine gerichtete Strecke genommen werden muß, oder z. B. einfach gleich einer reellen Zahl gesetzt werden kann.[1])

Will man diese Frage restlos erledigen, so bleibt nichts anderes übrig, als den Begriff der komplexen Zahl in einen Zusammenhang mit dem der reellen Zahl zu bringen und zu untersuchen, auf welche Weise das geschehen kann.

Bevor wir indessen dazu übergehen, die mathematische Analyse der komplexen Zahl in ihrer Allgemeinheit darzustellen, wollen wir zeigen, daß es nicht überflüssig ist, nach dem bisher Gesagten noch neue Begriffe einzuführen, daß vielmehr die gerichteten Strecken nicht die allgemeinste Form darstellen, deren die komplexen Werte fähig sind. Wie wollen zu diesem Zweck eine Exemplifikation der Existenz anderer komplexer Größen kennen lernen, um so zu zeigen, daß die gerichteten Strecken nur ein Spezialfall dieses Größentypus sind, dessen Allgemeinheit erst durch die ihn beherrschende Zahl klar wird.

§ 11. Interpretation geometrischer Gebilde.

Die komplexen Lösungen von Gleichungen machen sich nun in der projektiven Geometrie bei deren eigentümlicher Verbindung von geometrischer Anschauung mit Arithmetik und Algebra besonders unangenehm bemerkbar. Das zeigt sich manchmal, wenn man vermittelst einer aus allgemeinen analytischen Überlegungen gewonnenen

---

[1]) Ähnliches gilt von der bekannten GAUSS'schen Interpretation durch Punkte einer Ebene; nämlich: Es ist fraglich, ob die Punkte der Zahlenebene den gesamten Vorrat komplexer Größen erschöpfen.

Gleichung ebenso allgemeine geometrische Sätze aufstellen will. Der Satz z. B.: „Von jedem Punkt der Ebene sind zwei Tangenten an einen Kegelschnitt möglich," ist nur unter gewissen Voraussetzungen über die Lage der Punkte relativ zum Kegelschnitt in dieser einfachen, keine weiteren Unterscheidungen erfordernden Gestalt haltbar. Wenden wir nämlich die übliche Bezeichnung an, daß ein Punkt außerhalb oder auf oder innerhalb einer solchen Kurve liegen könne, so ist dieser Satz ohne weiteres der räumlichen Anschauung zugänglich für die außerhalb liegenden Punkte; auch die Exemplifizierung für Punkte auf der Kurve begegnet keinen prinzipiellen Schwierigkeiten, wenn wir sagen, daß hier die beiden Tangenten in eine (die Kurve in dem betreffenden Punkte berührende) Gerade verschmelzen.[1]) Dagegen läßt sich auf ähnliche Weise über die Punkte innerhalb der Kurve nichts sehen.

Versuchen wir, diese Resultate mit der den Satz liefernden quadratischen Gleichung und deren Lösungen zusammenzubringen, so zeigt sich, daß auch hier drei Fälle unterschieden werden: der zweier reeller Wurzeln, der mit einer reellen Wurzel und der, bei dem zwei komplexe Lösungen auftreten. Wir haben aber unsere Bestimmungsstücke so wählen müssen — um überhaupt den Ansatz machen zu können — daß für Interpretation der komplexen Werte (etwa mit Koordinaten nach dem Muster von ARGAND oder GAUSS) kein Platz mehr ist. Es fragt sich also, ob überhaupt den komplexen Werten in unserem so eingerichteten geometrischen System ein Sinn zukommt. Noch etwas deutlicher tritt dieser Zweifel vielleicht in der Fragestellung hervor: Wie müssen wir die geometrischen Elemente mit komplexen Werten deuten, damit sie einen anschaulichen Sinn bekommen, der sich in nichts von dem der gewöhnlichen reellen Elemente in der Geometrie unterscheidet? Welche geometrischen Gebilde lassen in unserem Systeme eine komplexe Deutung zu?

---

[1]) Das läßt sich durch kontinuierliche Annäherung eines äußeren Punktes an die Kurve sehr plausibel dartun.

Können wir dies Problem erledigen, so haben wir damit ein (neues) Größengebiet entdeckt, das der komplexen Rechnung zugänglich ist. Und es muß einwandfrei abgetan werden, wenn nicht die Allgemeinheit vieler Sätze geopfert werden soll, und — oft recht komplizierte — Unterscheidungen durchgeführt werden sollen.

Bekanntlich ist es dem Geometer v. STAUDT gelungen, eine solche Interpretation zu geben.[1] Die Grundgedanken seiner Auffassung kann man kurz in folgenden Worten zusammenstellen:

Die involutorische Beziehung

$$(x - a)(x' - a) + b^2 = 0$$

zwischen zwei Punktreihen x und x' liefert die beiden Doppelpunkte $a \pm bi$.[2] Man kann mit ihr einen bestimmten (geometrischen Richtungs-) Sinn verbinden, da beide projektivischen Punktreihen sich in ein- und demselben Sinne beschreiben lassen. „Um also den komplexen Punkt $a + bi$ geometrisch darzustellen, verbinde man mit der Involution den in der Aufeinanderfolge der Punkte $-b$, 0, $+b$ enthaltenen Sinn. Dann erhält man für den konjugierten Punkt $x = a - bi$ den entgegengesetzten Sinn $+b$, 0, $-b$."[3]

Man wird KLEIN hier zustimmen können, wenn er diese Art und Weise, den Sinn einzuführen, für etwas erklärt, das zunächst recht willkütlich erscheint[4] Es ist daher

---

[1] Vgl. v. STAUDT *Beiträge (101).*

[2] Wir entnehmen diese Art der Darstellung des Grundgedankens v. STAUDT's der Abhandlung von O. STOLZ *D. geom. Bedeutung (102).*

[3] STOLZ *Bedeutung (102)* S. 419.

[4] KLEIN *Interpretation (57)* S. 375. — Die Darstellung KLEIN's ist gerade in dieser historischen Angabe nicht ganz exakt. Wohl legt v. STAUDT auch der Geraden, auf der die involutorischen Punktreihen liegen, einen bestimmten Sinn bei (v. STAUDT *Beiträge (101)*, z. B. S. 34, 36 usw.; ebenso STOLZ *Bedeutung (102)* S. 419). Aber die Hauptsache ist, daß die involutorischen Gebilde selbst einen bestimmten Sinn annehmen. Dieser bestimmt dann die Sonderung der konjugiert komplexen Gebilde. Die Willkürlichkeit dieser Zuordnung des Sinnes wird dadurch natürlich nicht verringert.

für unsere Betrachtungen nicht ohne Interesse, daß es KLEIN gelungen ist, einen inneren Zusammenhang zwischen der v. STAUDT'schen Verwendung des Sinnes auf den projektivischen Punktreihen und dem Vorzeichenwechsel im komplexen Werte beim Übergang von einem Punkt zu seinem konjugiert komplexen herzustellen. Und zwar erreicht er dies Ziel durch Einführung einer projektivischen Maßbestimmung auf der Geraden und geeignete Wahl der hierbei auftretenden Konstanten. „Indem wir der Maßbestimmung ein bestimmtes Vorzeichen beilegen, sondern wir zwischen den beiden komplexen Punkten, insofern Vorzeichenwechsel und Vertauschung der beiden Punkte einander entsprechen.“[1])

Die Einführung einer Maßbestimmung hat aber zugleich noch den Vorteil, daß sie eine allgemeinere Interpretation zuläßt. „Als Bild des einzelnen komplexen Punktes dient die in bestimmtem Sinne durchlaufene, zyklisch projektivische Reihe von n mit Bezug auf die projektivische Maßbestimmung äquidistanten Punkten.[2]) Ist n = 4, so hat man ein Analogon der v. STAUDT'schen Interpretation.[3]) Besonders einfach ist n = 3, wo dann der komplexe Punkt durch drei reelle beliebig in bestimmtem Sinne zu durchlaufende Punkte einer Geraden repräsentiert wird.“[4])

Wir haben also hier ein ganz neues Gebiet — das der projektivischen Punktreihen —, von dem jedes Element wieder sozusagen das ganze komplexe Gebiet in sich schließt. Denn für jeden einzelnen Wert von n ergibt sich eine Darstellung der Gesamtheit aller komplexen Punkte. Durch die Untersuchungen KLEIN'S erhalten wir sonach — in der

---

1) KLEIN *Interpretation (57)* S. 376.

2) KLEIN *Interpr. (57)* S. 378f.

3) KLEIN *Interpr. (57)* S. 377.

4) KLEIN *Interpr. (57)* S. 377f. Kompliziert dagegen wird n = 2, wo man mangels genügender Konstanten aus den beiden — involutorischen — Punktreihen zwei Paare herausgreifen muß. Verbindet man mit ihnen noch einen bestimmten Sinn, so führt dies zur Interpretation v. STAUDT'S (KLEIN *Interpretation (57)* S. 377).

Sprache der Mengenlehre — abzählbar unendlich viele Interpretationsmöglichkeiten für komplexe Gebilde.

Wir haben hier aber durch den Gebrauch des Wortes „komplex" und den bestimmten Sinn, dem wir diesem in § 10 a. A. verliehen haben, etwas behauptet, was zunächst nicht so ohne weiteres einzusehen ist. — Bleiben wir, um diesen Zweifel zu erläutern, bei der einfachen Interpretation v. STAUDT's. Gibt es überhaupt im Gebiet der Involutionen etwas, das einer Gleichung von der Art $x^2 = -1$ ähnlich ist? und etwas, das eine solche Gleichung löst?

Diese Frage beantwortet uns v. STAUDT durch seine Algebra der Würfe[1]). Unter einem Wurf versteht er die involutorische Zusammenstellung von vier projektivischen Punkten einer reellen Geraden. Es gelingt ihm, für die Würfe„" W = ABCD eine auf geometrischen Überlegungen beruhende (symbolische) Rechnung zu entwickeln. Deren Addition und Multiplikation sind assoziativ und kommutativ, und es gilt in ihr das Gesetz — wenn U, V, W Würfe sind —

$$U \,.\, (V + W) = (U \,.\, V) + (U \,.\, W).$$

v. STAUDT zeigt dann, daß sich ein Wurf konstruieren läßt, dessen Quadrat einem harmonischen Wurfe gleich ist, mithin den Wert -1 hat. Damit ist dann endgültig entschieden, daß im Gebiet der Würfe eine Gleichung von der Form $(W_x)^2 + W_1 = W_0$ existiert, die der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ entspricht. x, 1 und 0 sind dann die den Würfen Wx, W_1 und W_0 entsprechenden Werte.

Daß es sich auch hier nur um eine Repräsentativgleichung handelt, ist aus dem eben Gesagten ersichtlich. Unseres Wissens st auch von mathematischer Seite nie mehr behauptet worden.

---

[1]) v. STAUDT *Beiträge (101)* S. 131—283. — LÜROTH hat die Algebra der Würfe nicht nur in Hinsicht der Grundoperationen durchgeführt, sondern ist sogar bis zu dem Satz vorgedrungen, daß eine Funktion n-ten Grades von Würfen für n Würfe verschwinden muß (vgl. LÜROTH *Rechnen (68)*).

Es ist also klar, daß diese Interpretationsmethoden der Geometrie uns ein neues Beispiel komplexer Größen eröffnet haben. Worin besteht nun das diesen Gebieten Gemeinsame? Diese Frage wird uns durch die Überlegungen des Folgenden beantwortet werden.

§ 12. System komplexer Zahlen.

Was wir bisher mit kurzen Strichen zu zeichnen versucht haben, ging im wesentlichen davon aus, daß die Existenz komplexer Größen nachzuweisen sei. Man fand hierbei eine analytische und synthetische Geometrie des Imaginären, nicht aber eine Algebra komplexer Werte als solcher. Alle Ansprüche, die sich hierauf bezogen, mußten abgewiesen werden. Insbesondere konnte nicht entschieden werden, welcher Zusammenhang zwischen den reellen Zahlen und den komplexen Werten aufzustellen sei, ob es eine Algebra komplexer Zahlen gebe, deren Sätze mit der für reelle Zahlen Ähnlichkeit haben.

Es war dem Zeichen $i = \sqrt{-1}$ wirklich nicht anzusehen, ob es, abgesehen von dem ungewöhnlichen Satz $i^2 = -1$ nicht plötzlich noch ganz andere verblüffende Eigenschaften an den Tag legte, die man bei reellen Zahlen nicht gewöhnt war, und die vielleicht wichtige und grundlegende Sätze der Algebra umgestoßen hätten.[1] So wird die Frage, die nunmehr in den Mittelpunkt unserer Diskussion tritt, nicht mehr die nach der Existenz komplexer Größen, sondern die folgende: Gibt es eine „komplexe Algebra", wie sind ihre Sätze im Vergleich zu der der reellen Zahlen und wie sind die ihr zugrunde liegenden komplexen Werte gegenüber den reellen Zahlen zu denken?[2])

---

[1]) So könnte etwa durch Addition von i zu einer bisher konvergenten Reihe diese in eine divergente verwandelt werden. Oder man könnte vermuten, daß die Produkteigenschaft $i^2 = -1$ mit anderen, etwa $a \cdot i \neq i \cdot a$ (für bestimmte Werte a) in einem dann noch näher zu erforschenden Zusammenhang stehe.

[2]) Diesen Gegensatz von Anwendung im Größengebiet und dem Begriff des Angewandten schildert DUREGE wie folgt: Nachdem er die Versuche, die Unmöglichkeit des Imaginären auf Grund

Zur Lösung dieser Frage sind in der uns bekannten mathematischen Literatur zwei Wege eingeschlagen. Im Verfolg des ersten stellt man die beiden Begriffe „komplexe“ und „reelle“ Zahl einander als vollkommen selbständige, nicht aufeinander zurückführbare gegenüber.[1] Als einziges Vergleichsmittel bleibt dann zur Feststellung des Übereinstimmens oder Abweichens der verschiedenen, aus diesen Wurzeln stammenden Satzgefüge nur die Gleichheit oder Ungleichheit der Formeln übrig. Sie wird dadurch festgestellt, daß man bei entsprechenden Formeln in beiden Gebieten für entsprechende Werte (hier reelle, dort komplexe) die gleichen Zeichen setzt. Läßt sich hierbei eine Übereinstimmung in den wichtigsten Gesetzen nachweisen, so entnehmen wir daraus die Berechtigung, von einer Arithmetik oder Algebra komplexer Werte ebenso, wie von einer der reellen Zahlen zu reden. Durch die Feststellung der Übereinstimmung von Hauptformeln beider Bereiche erhalten wir dann auch die Berechtigung, den Zahlbegriff zu „erweitern“. Wir sehen nämlich, daß die auf beiden Gebieten sich erhebenden Gebäude in wichtigen Stücken einander gleichen, in anderen aber voneinander abweichen. Diese Ähnlichkeit, die doch nicht Identität ist, soll nun am ungezwungensten und einfachsten dadurch bewältigt werden, daß man die Elemente beider Gebiete als verschiedene Sonderfälle eines allgemeineren Begriffes auffaßt. Bisher kannte man nur den einen Unterfall genauer und glaubte in ihm bereits den allgemeinen Begriff erschöpft,

---

ger Unmöglichkeit seiner Anwendung in der Geometrie darzutun, destreift hat, fährt er fort: „Dabei ließ man aber außer Acht, daß die reine Mathematik, die Wissenschaft der Addition, so wichtig auch ihre Anwendungen sind, doch an und für sich mit den letzteren nichts zu tun hat, daß ihre durch eine vollständige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe in der Definition selbst ihre Existenz begründen, und daß ihre Sätze wahr sind, gleichviel ob man von ihnen eine Anwendung machen kann oder nicht.“ DUREGE *Elemente (26)* S. 3.

[1]) Sie werden dann, wie bei GRASSMANN, WEIERSTRASS u. a. als Spezialfälle eines allgemeineren Begriffes aufgefaßt, wie später erörtert wird.

der nunmehr indessen durch die aufgedeckte Ähnlichkeit beherrschender Gesetze auch den anderen Sonderfall umschließt.[1])

Auf dem anderen Wege setzt man umgekehrt den Begriff der komplexen Zahl unmittelbar mit dem der reellen in Beziehung. Wie dieses „in Beziehung setzen“ gemeint ist, werden wir noch genauer sehen. Einstweilen genüge die Bemerkung, daß es nicht so gemeint ist: Die komplexe Zahl ist ein Spezialfall der reellen Zahl, nämlich eine reelle Zahl mit den und den Eigenschaften.

Bahnbrechend auf dem erstgenannten Wege sind unbestreitbar HERMANN GRASSMANN d. Ä. und HERMANN HANKEL gewesen. Namentlich der letztere hat einen ungemein großen, fast möchte man sagen, beherrschenden Einfluß gehabt. Bei ihm findet sich das bekannte und vielbesprochene Prinzip von der „Permanenz formaler Gesetze“ zuerst aufgestellt und angewendet.[2]) Demgegenüber wirkte, historisch betrachtet, GRASSMANN in unserer Frage zunächst mehr anregend als wegweisend.[3])

Vor allen Dingen kommt hier in Frage die Auswertung, die durch ihn der Begriff der Vielfachsumme

$$a = \sum_{1}^{n}{}^{\lambda} \cdot \alpha_\lambda\, e_\lambda = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

erfahren hat. Wenn die α_λ hierbei Zahlkoeffizienten, die e_λ

[1]) Von dieser Methode, den Begriff der reellen mit dem der komplexen Zahlen in Verbindung zu setzen, ist prinzipiell streng die oft geübte Dekretmanier zu unterscheiden. Sie besteht darin, daß man zu den reellen Zahlen solche mit neuen Einheiten „hinzufügt“. Ihre Existenz und die Gültigkeit ihrer „formalen Gesetze“ wird dann einfach dekretiert. So z. B. PRINGSHEIM *Zahlenlehre (84)* S. 515f. — Ähnlich führt NETTO einfach eine neue Einheit j neben 1 ein, und zwar soll dieses j nicht reell sein. NETTO *Algebra (74)* S. 3f. Ob aber eine solche Einheit Zahlen bilden kann und in diesem Sinne arithmetisch „existiert“, wird nicht bewiesen. Es wird nur gezeigt, daß eine solche Einführung neuer Einheiten „wertvoll“ ist.

[2]) Wir werden, wenn irgend möglich, das Wort „formal“ vermeiden, da es zu vielerlei Bedeutungen hat.

[3]) Für die Theorie der komplexen Zahlen sind namentlich die Gedanken GRASSMANN's in den beiden Bearbeitungen der *Ausdehnungslehre* (A_1 *(33)* und A_2 *(34)*) heranzuziehen.

dagegen irgendwelche Einheiten (die nicht irgendwie rechnungsmäßig auseinander ableitbar sind), so nennt GRASSMANN eine solche Vielfachsumme eine extensive Größe.

Besonders wichtig ist ferner, daß GRASSMANN zuerst eine Theorie der Addition und Multiplikation entwickelt hat, die es nicht nur erlaubt, diese Verknüpfungen auf andere Gegenstände, als auf Zahlen auszudehnen; sondern die auch eine ungemeine Mannigfaltigkeit von Unterfällen innerhalb der Multiplikation gestattet. Das wird dadurch erreicht, daß als Kennzeichen dafür, ob eine Verknüpfung den Namen Multiplikation verdiene, nicht mehr die Untersuchung angesehen wird, ob

$$m \cdot n = n + n + n \ldots + n$$

gesetzt werden könne: Das ist nur dann möglich, wenn n eine positive ganze Zahl ist.[1]) Vielmehr wird hier bewußt auf bestimmende Formeln als Merkmale zurückgegangen. Jede Verknüpfung, für die die Formeln gelten (hierbei stellt $\frown$ das allgemeine Verknüpfungszeichen dar)

$$a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c \text{ und } a \frown b = b \frown a,$$

heißt eine einfache Verknüpfung.

Die erste einfache Verknüpfung, durch welche Elemente eines bestimmten Bereiches miteinander verbunden werden, heißt Addition. Jede Addition ist daher — ihrem Begriffe nach — assoziativ und kommutativ; auf welche Gegenstände sie sich beziehen mag, kommt hierbei nicht in Betracht. Immer, wenn wir zwei mathematischer Betrachtung unterwerfbare Dinge, „Formen" — um mit GRASSMANN zu reden[2]) — zu einer dritten vereinigen,

[1]) Man kann ohne Übertreibung sagen, daß bis auf GRASSMANN Untersuchungen über den Operationsbegriff der Mathematik fremd waren. Bei HAMILTON finden sich Ansätze in dieser Richtung. — Wir möchten bei dieser Gelegenheit bemerken, daß uns trotz mancher sachlichen Ausstellungen, die wir an GRASSMANN's Gedankengängen hinsichtlich unserer Frage tun mußten, die Arbeiten GRASSMANN's wegen ihrer Durchsichtigkeit und Geschlossenheit des begrifflichen Aufbaus in vielen Dingen musterhaft erscheinen.

[2]) Um den GRASSMANN'schen Begriff der „Form" richtig zu fassen, müssen wir die philosophische Grundlegung der ersten Ausdehnungslehre berücksichtigen: „Die oberste Einteilung der Wissen-

so daß das Resultat von der Ordnung der zu verbindenden Formen unabhängig ist, und wenn bei einer Verknüpfung von drei Formen, die Art, wie die Klammern gesetzt werden, ohne Einfluß auf den Wert des Resultates ist, wenn endlich diese Verknüpfung die erste ihrer Art ist, — so haben wir „addiert“.

Wollen wir nun zur ersten eine zweite Verknüpfung hinzufügen, so ist natürlich von besonderem Interesse, wie sich diese beiden Verknüpfungen zueinander stellen. Wählen wir als Zeichen für die zweite Verknüpfung $\hat{\frown}$, so ist demnach von Wichtigkeit, zu erfahren, wie sich $a \mathbin{\hat{\frown}} (b \frown c)$ gestaltet. GRASSMANN hält es für das „Einfachste“, wenn sich das Ergebnis in der Formel $a \mathbin{\hat{\frown}} (b \frown c) = (a \mathbin{\hat{\frown}} b) \frown (a \mathbin{\hat{\frown}} c)$ darstellen lasse. Dann und immer dann, wenn die durch $\hat{\frown}$ bezeichnete Verknüpfung diesem Gesetze gehorcht, soll sie den Namen der Multiplikation tragen. Für die **Multiplikation** ist es daher durchaus nicht notwendig, daß sie kommutativ oder assoziativ sei. Vielmehr kann man nach GRASSMANN ebenso nicht-kommutative wie nicht-assotiative Multiplikationsarten festsltelen. Das wären dann solche Verknüpfungen $a \mathbin{\hat{\frown}} b$, für die die Sätze $a \mathbin{\hat{\frown}} b = b \mathbin{\hat{\frown}} a$ und $a \mathbin{\hat{\frown}} (b \mathbin{\hat{\frown}} c) = (a \mathbin{\hat{\frown}} b) \mathbin{\hat{\frown}} c$ nicht gelten. Ob diese und andere uns für die Multiplikation gewohnte Sätze ihre Gültigkeit behalten, hängt von der Natur der verknüpften Größen, nicht von der der Verknüpfung (Multiplikation) selber ab. Bedeuten z. B. a, b, c reelle Zahlen, so wissen

---

schaften ist die in reale und formale.“ Bei ersteren tritt das Sein als selbständiges dem Denken gegenüber, bei letzteren erscheint es durch das Denken geworden. Der nächste Einteilungsgrund ist der des Allgemeinen und des Besonderen: „Die formalen Wissenschaften betrachten entweder die allgemeinen Gesetze des Denkens oder das Besondere durch das Denken gesetzte; ersteres die Dualektik (Logik), letzteres die reine Mathematik.“ „Die reine Mathematik ist daher die Wissenschaft des besonderen Seins als eines durch das Denken Gewordenen. Das besondere Sein, in diesem Sinne gefaßt, nennen wir die Denkform oder schlechtweg die ‚Form‘. Daher ist reine Mathematik Formenlehre.“ (A_1 *(33)* S. 22ff.) Dieser Sprachgebrauch weicht von dem unsrigen in § 7 d. A. entwickelten in mehr als einem Punkte ab.

wir, daß für ihre Verknüpfungen das Assoziativ- und Kommutativgesetz gelten, für sie ist daher die Multiplikation die zweite einfache Verknüpfung.

Nun wird das Produkt a · b zweier extensiver Größen $a = \sum^{\lambda} \alpha_{\lambda} e_{\lambda}$ und $b = \sum^{\mu} \beta_{\mu} e_{\mu}$ bei GRASSMANN durch folgende Formel dargestellt:

$$a \cdot b = \sum^{\lambda} \sum^{\mu} \alpha_{\lambda} \beta_{\mu} (e_{\lambda} \cdot e_{\mu})$$

Daher ist es zur Feststellung dieses Resultates notwendig, über das Produkt der Einheiten e_{λ}, e_{μ} sich Klarheit zu verschaffen. Wieder tritt hier besonders deutlich hervor, daß für den Begriff der extensiven Größe wesentlich die verschiedenen Einheiten sind; gerade durch sie unterscheiden sich die extensiven Größen von den gewöhnlichen Vielfachsummen der Algebra. Denn bei den letzteren ist es selbstverständlich, daß das Produkt der Unbekannten $x_{\lambda} \cdot y_{\mu}$, das hier an Stelle des der Einheiten $e_{\lambda} \cdot e_{\mu}$ zu untersuchen wäre, kommutativ und (bei drei Unbekannten) auch assoziativ ist.

Wir brechen damit die Untersuchungen über die Produkte ab.

Überhaupt haben wir die Darstellung der GRASSMANNschen Ausdehnungslehre nur aus zwei Gründen hier soweit geführt: Erstens nämlich berühren sich seine Untersuchungen über Operationen aufs engste mit den Gedankengängen, die später ausführlich HANKEL entwickelt hat. Andererseits sind seine Überlegungen über die Produkte der Einheiten extensiver Größen, wie überhaupt der Begriff der extensiven Größe selbst, von größter Wichtigkeit für die späteren Entwicklungen der Algebra der komplexen Zahlen geworden.

Die komplexe Zahl selbst allerdings tritt bei GRASSMANN nur gelegentlich und recht am Ende seiner Entwicklungen hervor.[1])

---

[1]) Die konsequente Verwendung dieser Gedanken für komplexe Zahlen scheint — abgesehen von HANKEL — zuerst bei WEIERSTRASS zu finden zu sein. Vgl. STOLZ *Arithm. (103)* S. 316.

Zwar wird schon in der Vorrede zur ersten Ausdehnungslehre darauf hingewiesen, daß der geplante zweite Teil, der sich mit dem Winkel und dessen abstraktem Analogon, der Schwenkung, befassen solle, auch über das Imaginäre einiges Licht verbreiten werde. Es zeige sich nämlich, daß die Schwenkung zweier Größen a zu b, also das, worum a geändert werden müsse, damit es mit b identisch werde, sich als Quotient $\frac{b}{a}$ darstellen lasse, da $\frac{b}{a} \cdot a = b$ ist. Nun soll eben gezeigt werden, daß, wenn $a \cdot b = \frac{\pi}{2}$ ist (was geometrisch interpretiert, soviel bedeutet, wie „a steht senkrecht auf b“), der Quotient $\frac{b}{a}$ den Wert $\sqrt{-1}$ annimmt.

Es könnte also fast so scheinen, als stünden wir vor einer Neuentdeckung der Quaternionen. Demgegenüber ist aber zunächst einzuwenden, daß die Quaternionen in dieser Form ausschließlich immer an Strecken im Raume operieren, während GRASSMANN ganz allgemein irgendwelche Größen in Betracht zieht. Es wäre also ein wesentlicher Fortschritt hinsichtlich der Aufdeckung abstrakter Größenbegriffe möglich gewesen, wie er bereits früher gefordert wurde (§ 10 a. E.) GRASSMANN aber hat diesen Schritt nicht mit Sicherheit getan. Der geplante zweite Teil der Ausdehnungslehre ist in der angekündigten Gestalt nie erschienen. Und was von den eben angedeuteten Betrachtungen in der zweiten Ausdehnungslehre sich findet, rechtfertigt in keiner Weise die Erwartungen, die wir für den Fortschritt in der Bearbeitung unserer Frage durch GRASSMANN nach dem eben Gesagten zu hegen berechtigt schienen.

Auch lehnt es GRASSMANN ab, den Begriff der extensiven Größe so auszubauen, daß er ohne weiteres die imaginäre Zahl mit umfasse. Es scheint uns fast, als träte hier störend die nicht ganz reinliche Scheidung zwischen Größe und Zahl dazwischen. Wenn wir auch für diese Behauptung keinen unmittelbar einleuchtenden Beweis erbringen können,

so scheint uns doch ihre Wahrheit aus dem im folgenden dargestellten Schwanken, wie die komplexe Zahl zur extensiven Größe stehe, deutlich zum Ausdruck zu kommen.

Im Vorwort der zweiten Ausdehnungslehre erscheint die komplexe Zahlgröße a + bi durchaus als Größe. Denn daraus, daß dieses a + bi außerordentlich nahe verwandt mit der allgemeinen Vielfachsumme aus mehreren Einheiten ist, leitet GRASSMANN die Berechtigung ab, letztere, $\sum_{1}^{n}\lambda\, \alpha_{\lambda}\, e_{\lambda}$, ebenfalls „Größe“ und zwar zur Unterscheidung „extensive Größe“ zu nennen. a + bi wird nämlich als „Vielfachsumme“ erklärt, abgeleitet aus der Einheit der natürlichen Zahlen, der 1, und einer anderen Einheit i ($= \sqrt{-1}$). Nennt man daher a + bi eine „Größe“, wie das damals üblich war, so sei nicht einzusehen, warum man diesen Namen nicht auch einer Vielfachsumme zugestehen will, deren Einheiten (zunächst nur zwei) beliebige verschiedene e_1, e_2 sind; und dann ergibt sich die Übertragung auf den Fall $e_1, e_2, \ldots e_n$ von selbst.

Mag diese Übertragung des Größennamens nun berechtigt sein oder nicht — GRASSMANN sagt nicht, ob in der extensiven Größe der allgemeinste mathematische Größenausdruck gegeben sei oder nicht, — sicher ist, daß hier die komplexe Zahl als Größe auftritt und zwar als eine der extensiven Größe sehr nahe verwandte. Die Verwandtschaft grenzt schon nahezu an Unterordnung — aber die Subsumption wird nicht vollzogen!

Ganz anders wird die Auffassung über die komplexe Zahl, als es sich — fast am Ende des Werkes[1]) — darum handelt, den Begriff der „Zahlfunktion“ gegenüber dem der „extensiven Funktion“ auseinanderzusetzen. „Zahlfunktion nenne ich eine Funktion, welche für beliebige Werte der Variabeln, von denen sie abhängt, stets einen Zahlwert (reellen oder imaginären, ganzen oder gebrochenen, rationalen oder irrationalen) annimmt. Extensive Funktion

---

[1]) GRASSMANN A_2 *(34)* S. 225.

nenne ich eine Funktion, die für alle (oder gewisse) Werte der Variabeln einer extensiven Größe gleich ist." Hierzu wird noch ausdrücklich bemerkt: „Die imaginäre Zahlgröße $p + q \cdot \sqrt{-1}$ steht auf der Grenze extensiver Größen. Sie ist als extensive Größe aufzufassen, sobald man als Ausdruck der Zahlbeziehung zwischen mehreren Größen nur reelle Zahlkoeffizienten zuläßt, indem dann 1 und $\sqrt{-1}$ als Einheiten erscheinen, die in keiner Zahlbeziehung zueinander stehen. Hingegen ist sie als Zahlgröße aufzufassen, sobald auch imaginäre Zahlkoeffizienten für den Ausdruck der Zahlbeziehung gestattet sind. Wenn daher die Funktion $y = f(x)$ für reelles x imaginäre Werte, etwa $u + v. \sqrt{-1}$, annimmt, so kann sie in dem ersten Sinn als extensive Funktion aufgefaßt werden, doch wollen wir in der Funktionenlehre stets den letzteren Sinn festhalten, also auch in dem Fall y imaginär wird, dennoch y als Zahlfunktion auffassen, wie es in der Erklärung geschehen ist."

Es ist dies wohl die einzige Stelle in der zweiten Ausdehnungslehre, in der es sich bemerkbar macht (im Gegensatz zur ersten Bearbeitung), daß GRASSMANN diesen ganzen „neuen Zweig der Mathematik" hatte unabhängig von den anderen Disziplinen entwickeln wollen. Nun zeigt es sich, daß die Grundlagen der anderen Disziplinen doch nicht zu entbehren sind, und wichtige Begriffe, wie der der komplexen Zahl nicht ganz einwandfrei in dem GRASSMANNschen Systeme unterzubringen sind. Denn hier wird ersichtlich, daß wesentlich für den Begriff der extensiven Größe auch das Verhalten der Zahlkoeffizienten wird. Nicht nur die Einheiten, wie schon früher bemerkt, sondern ebenfalls die Zahlbeziehung bestimmt die Struktur einer besonderen vorgelegten Größe, d. h. macht dasjenige aus, wodurch sie sich von anderen extensiven Größen unterscheidet. Und wie wir eben gesehen haben, ist dieses letztgenannte Bestimmungsstück — die Zahlbeziehung — unter Umständen von derartiger Wichtigkeit, daß die in ihm liegenden Unterschiede bewirken können, daß ein ganzes Ge-

biet von Werten (nämlich die komplexen) als extensiv erscheinen kann oder nicht.

Will man also die GRASSMANN'schen Untersuchungen als Ausgangspunkt zur Untersuchung über die Grundlage der komplexen Zahl nehmen, so sind hierbei sicher die von GRASSMANN benutzten Voraussetzungen zu verschärfen, wenn nicht überhaupt in manchen Stücken durch andere zu ersetzen.

Bevor wir indessen die Weiterbildung der GRASSMANNschen Ideen betrachten, untersuchen wir den Verlauf und Ursprung einer anderen Quelle, die späterhin — ebenfalls geklärt — sich mit der eben betrachteten zu einem Strome vereinigt hat, nämlich die Theorie HANKEL'S.

„In allen Schriften (HANKEL'S) ist der Gedanke zu durchgreifender Geltung gekommen, aus dem empirischen Detail die leitenden Prinzipien herauszuholen „welche zur Einheit die Einzelheiten zusammenfassen; ...".[1]) So ist sicher auch in den grundlegenden Untersuchungen HANKEL'S über die komplexen Zahlensysteme, mit welchen wir uns jetzt zu beschäftigen haben, das Bestreben unverkennbar, eine Grundlage für die Lehre zu schaffen, welche die komplexen Zahlen und deren Grundlagen mit denen der gesamten Zahlenlehre in Verbindung setzt.

Da steht an erster Stelle das von ihm selber so genannte „Prinzip der Permanenz formaler Gesetze". Sein Inhalt wird sich ungefähr so ausdrücken lassen: Die arithmetica universalis, „die wesentlich mit einfachen gleichartigen Größen operiert, und sich ... konkret allgemeiner Zeichen, z. B. der Buchstaben, bedient, hat uns ein System von Regeln kennen gelehrt, welche ... den ... Charakter der Independenz tragen. Diese werden wir zum Leitfaden nehmen und Operationen formal so bestimmen, daß die Resultate in die der gewöhnlichen Arithmetik dann übergehen, wenn an Stelle der mentalen Objekte[2]), an denen

---

[1]) HANKEL *Elemente (37)* S. III.

[2]) „Um aller Unklarheit der Begriffe ... zu entgehen, wird man gut tun, solche Zahlen, deren Begriff ein vollkommen bestimmter ist, die aber einer irgendwelchen Konstruktion in der

operiert wird, solche in der Anschauung existierenden Objekte getreten sind, deren gegenseitige Relationen durch gemeine Zahlen bestimmt werden."[1])

Die eben erwähnten Regeln der arithmetica universalis sind nun früher[2]), wie folgt, von HANKEL entwickelt worden:

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c;$$
$$a + b = b + a; \; a \cdot b = b \cdot a;$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c;$$
$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \; (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a;$$
$$a^{(b \cdot c)} = (a^b)^c; \; (b \cdot c)^a = b^a \cdot c^a; \; a^{(b + c)} = a^b \cdot a^c;$$
$$a + 0 = a; \; a \cdot 1 = a; \; (a - b) + b = a; \; \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Erwägt man diese Fülle von Regeln, so wird man die einschränkenden Worte HANKEL'S sehr begreiflich finden: „Das Prinzip wird im folgenden unsere Schritte leiten, es darf aber in seiner Allgemeinheit nicht überall und ohne weiteres verwandt werden; wir werden es überall nur zur Definition der notwendigen und hinreichenden Regeln, soweit diese voneinander unabhängig sind, verwenden dürfen. Jedoch werden wir uns durch dasselbe nicht allzusehr beschränken lassen, namentlich die Kommutativität unserer Operationen nicht unbedingt voraussetzen, da es sich als wissenschaftliche Notwendigkeit gezeigt hat, Operationen zu betrachten, welche den Regeln der arithmetischen Multiplikation nur mit Ausnahme jener entsprechen".

Betrachten wir also die Rolle, die diesem vielgenannten und oft zitierten Prinzip zugewiesen werden kann.[3]) Daß

Anschauung nicht fähig sind, rein mentale, rein intellektuale oder rein formale zu nennen, im Gegensatze zu den aktualen Zahlen, welche in der Lehre von den wirklichen Größen und deren Verknüpfung ihre Repräsentation finden." HANKEL *Theorie (36)* S. 7.

[1]) HANKEL *Theorie (36)* S. 11.

[2]) HANKEL *Theorie (36)* S. 2ff.

[3]) HANKEL spricht sich hierüber nicht ganz klar aus. Im allgemeinen wird das Prinzip nur als ein heuristisches betrachtet (So *Theorie (36)* S. 11, 33, 41, 67, 100.) Aber in einer längeren Ausführung versucht HANKEL nachzuweisen, daß die Gesetze, wie sie die Operationen zeigen, auch in anderen Disziplinen (Mechanik usw.)

es, da von ihm unberechenbare Ausnahmen gestattet werden, nicht dazu dienen kann, die Wissenschaftlichkeit gewisser Operationsgruppen und der mit ihnen arbeitenden Theorieen nachzuweisen, liegt nach den letzten Worten auf der Hand.

Aber selbst wenn man das „Prinzip" in seiner vollen Allgemeinheit und Strenge durchführen und etwa nur einen Teil der oben angeführten Regeln ihm zugrunde legen wollte, so wäre doch jeder Versuch, es als alleiniges Beweisprinzip der allgemeinen Zahlenlehre zu benutzen, von vornherein zum Scheitern verurteilt.[1]) Denn wenn man mit seiner Hilfe die Gültigkeit bestimmter Operationen nachweisen wollte, so ist zu bemerken, daß dieses nur unter Voraussetzung der Gültigkeit der Regeln der arithmetica universalis geschehen könnte. Und deren Regeln? Sind sie nicht Anwendungen der Regeln der allgemeinen Zahlenlehre? oder was sonst? Will man dem Zirkel entgehen, so muß man also versuchen, die Sätze der arithmetica universalis auf irgend einem anderen Wege, als durch Unterordnung unter die allgemeinen Regeln zu beweisen. Und selbst wenn dieses gelungen wäre, so fragt es sich, ob man als Beweisprinzip für die allgemeinen Sätze deren permanente Übereinstimmung mit denen der Buchstabenrechnung gelten lassen kann.[2]) Das ist nun aber in der behaupteten Allgemeinheit

---

grundlegend für deren Gesetzmäßigkeit sind, und „das Prinzip der Permanenz nicht nur ein spezielles oder hodegetisches, sondern als ein metaphysisches" sich erweist (S. 12). Worin aber der Gegensatz zwischen hodegetisch und metaphysisch besteht, bleibt dunkel. — Wichtig ist für die vorliegende Frage die Erörterung über den methodischen Weg, der zu den Rechnungsoperationen bei komplexen Zahlen führt (S. 100). Hier wird die Ergänzung des fraglichen Prinzips durch einen „synthetischen" Beweis dargelegt. (Ähnlich S. 53f.)

[1]) Diesen Versuch unternimmt SCHUBERT in seinem Enzyklopädieartikel *(98)*.

[2]) Die Rückführung auf ein anderes Gebiet hat HILBERT versucht (vgl. S. 216ff. d. A.). Die weiteren Gedankengänge HILBERT's gehen aber in ganz anderer Richtung als die nach der „Permanenz formaler Gesetze" gerichteten. Sie werden daher von der Kritik im Text nicht betroffen.

sicher nicht der Fall. Denn wo liegt der Beweis dafür, daß man, in einer ursprünglich richtigen Regel Größen durch andere ersetzend, nicht die Richtigkeit in Unrichtigkeit verwandelt? Bei den logischen Gesetzen stimmt das zum mindesten nicht. Man versuche nur einmal, an Stelle der Begriffe, empirische Objekte irgendwelcher Art zu setzen, ohne vorher das ersetzende Größengebiet genau durchforscht zu haben!

In der Tat hat auch HANKEL selbst (im allgemeinen) sein aufgestelltes „Prinzip" niemals in diesem Sinne als deduktives Prinzip benutzen wollen. „Die reine Mathematik, deren Prinzipien wir hier dargelegt haben, besteht nach eben diesen nicht in einer Verallgemeinerung der gewöhnlichen Arithmetik, sie ist eine vollkommen neue Wissenschaft, deren Regeln durch letztere nicht bewiesen, sondern nur exemplifiziert werden."[1])

Es war nötig, dies festzustellen. Denn überall, wo ein „Prinzip" auftritt, selbst wenn es zunächst nur als heuristischer Leitfaden eingeführt wird, liegt doch immer die Vermutung nahe, daß es als Stütze für die Wissenschaftlichkeit der aus ihm „abgeleiteten" Sätze benutzt wird. Daher ist es zum mindesten äußerst zweckmäßig in solchen Fällen zu untersuchen, mit welchem Anspruch ein derartiger Satz auftreten kann oder auftreten könnte. Denn ebensogut wie ein ausschließlich analogisch zu verwertender Leitfaden zum deduktiven Grundsatz gestempelt werden könnte, wäre ja auch das Gegenteil einmal möglich.

Für unsere Frage, an welchen Ort der Wissenschaft die komplexen Zahlen mit Recht zu setzen sind, hat daher das Prinzip der Permanenz formaler Gesetze so gut wie kein Ergebnis zutage gefördert. Betrachten wir nunmehr die Art, in der HANKEL die Theorie der komplexen Zahlen selbst aufbaut.

Zunächst wird eine allgemeine Theorie der Operationen an beliebigen Gegenständen entworfen. „Thetische" und

---

[1]) HANKEL *Theorie (36)* S. 12. Vgl. S. 59 Anm. 3 d. A.

„lytische“ Operationen werden untersucht[1]) (erstere — durch Θ (a, b) bezeichnet — als Analogon zu Summe, Produkt, Potenz, Exponent; letztere — Bezeichnung: λ(a, b) — in Analogie zu Differenz, Quotient, Wurzel, Logarithmus).[2]) Sie werden betrachtet, soweit sie eindeutig[3]) und assoziativ sind[4]), mit und ohne Berücksichtigung des Kommutativsatzes. Inbesondere werden ihre beiden ersten Unterfälle: Addition mit Subtraktion[5]) und Multiplikation mit Division[6]) dargestellt. Hierbei wird der „Modul“ der Addition mit 0, der der Multiplikation mit 1 bezeichnet[7]). Die Begriffe Summe und Produkt werden also als Resultate von Verknüpfungen festgelegt, für welch letztere folgende Folmeln gelten: Θ(a, Θ(b c)), = Θ (Θ (a, b), c) für beide gemeinsam; a + b = b + a ist unr für die Addition erforderlich; von nur Multiplikation ist zu verlangen daß sie zur Addition in

---

[1]) „Es bedeute λ(a, b) eine Verknüpfung von a und b; und etwa c das Objekt, welches aus der vollzogenen Verknüpfung resultiert, so daß λ(a, b) = c gesetzt werden kann. Diese Verknüpfung soll so beschaffen sein, daß, wenn man auf geeignete Weise das Resultat c mit b thetisch verknüpft, daraus das andere Glied a mit Notwendigkeit wieder erhalten wird. Bezeichnet man diese letzte Verknüpfugn mit Θ, so spricht Θ (c, b) = a oder Θ (λ (a, b), b) = a diese Annahme in Zeichen aus und enthält zugleich eine Difinition der thetischen Verknüpfung Θ aus jener λ, die wir als eine lytische bezeichnen“ (HANKEL *Theorie (36)* S. 18). Daß Θ durch λ mit Hilfe jenerFormel definiert sei, ist solange ungewiß, als uns HANKEL verschweigt, was er eigentlich unter der Definition einer Operation verstehe. — GRASSMANN ist in dieser Beziehung der durchgreifendere Denker. Er führt die Bestimmtheit einer Operation darauf zurück, wann man die aus ihnen abgeleiteten Resultate als gleich setzen könne (GRASSMANN A_1 *(33)* S. 35).

[2]) HANKEL *Theorie (36)* S. 4. In der Exposition werden die lytischen Operationen, wie gewöhnlich, auf die thetischen gegründet und nicht umgekehrt, wie in der Formenlehre.

[3]) HANKEL *Theorie (36)* S. 18ff.

[4]) HANKEL *Theorie (36)* S. 21ff.

[5]) HANKEL *Theorie (36)* S. 29f.

[6]) HANKEL *Theorie (36)* S. 30ff.

[7]) Der Modul einer thetischen Operation Θ (a, b) = c ist diejenige Zahl n, die, mit jedem a verknüpft, a ergibt: also Θ(a, n) = a. HANKEL *Theorie (36)* S. 23.

der Beziehung $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ und $(a + b) \cdot c$ $(a \cdot b) + (b \cdot c)$ steht.[1])

Auf die Theorie der Operaticnen läßt HANKEL die der Zahlensysteme folgen. Dabei wird der allgemeine Begriff eines Zahlensystemes, wie folgt, umschrieben: Es handelt sich darum, sich auf konsequente Weise ein Zeichensystem zu verschaffen so daß das Ergebnis jeder Operation notwendig durch ein Zeichen des Systems dargestellt werden muß. „Ein solches System kann nur geschaffen werden wenn man von gewissen Elementen, den Einheiten, ausgeht diese auf alle mögliche Weise durch Operationen verbindet und die Resultate dieser Operationen mit neuen Zeichen signiert. Diese neuen Zeichen werden dann nach vorstehenden Regeln wieder zu verknüpfen sein und zu neuen Zeichen Veran assung geben usw. Fährt man so fort, bis man zu neuen Zeichen nicht mehr gelangt, also die Resultate der neuen Operationen durch die schon vorhandenen passend ausgedrückt werden können, so nennt man die gebildete Zeichenreihe ein abgeschlossenes System oder Gebiet dessen Ordnung ich nach der Zahl von Einheiten benenne, welche bei seiner Bildung verwendet worden sind.“[2]) „Die Zeichen eines solchen Systems nenne ich Zahlen und setze also deren Begriff in einen notwendigen Zusammenhang mit den Operationen, durch welche sie gebildet werden und ineinander übergehen. Jede Veränderung der Operationsregeln bringt eine Veränderung der Zahlen mit sich.“[3]) Daher der Begriff der Zahl so definiert werden kann: „Eine Zahl ist der Ausdruck gewisser formaler Beziehungen beliebiger Objekte zueinander; ein Zahlensystem stellt eine systematisch geordnete Reihe solcher Beziehungen oder Verknüpfungen dar, deren Wesen den Charakter des Zahlensystemes ausmacht.“[4])

---

[1]) HANKEL *Theorie (36)* S. 31.
[2]) HANKEL *Theorie (36)* S. 35.
[3]) HANKEL *Theorie (36)* S. 36.
[4]) HANKEL *Theorie* (36) S. 36.

Gegen diese Theorie des Formalismus ist aber der schlagende Einwand zu erheben: Wenn es nur auf die Operationen ankommt, wie erklärt sich dann die Änderung des Zahlensystems bei einem Wechsel der Einheiten?[1]) Das macht sich dann bei der speziellen Bestimmung des Systemes der natürlichen Zahlen geltend, die aus dem Modul der Multiplikation, der 1, durch Addition geschaffen werden.[2]) Denn nun ist wirklich die Frage unausbleiblich: Muß denn das Element, aus dem die Zahlenreihe hervorgehen soll, ausgerechnet ein Modul sein? Warum nimmt HANKEL nicht irgendeinen anderen Gegenstand, etwa einen Begriff, wie den: „Ethik"? Was würde z. B. (wenn wir Ethik mit e bezeichnen) in diesem Falle $e + e$ bedeuten? Auch 2? Hieraus geht wieder hervor, daß die gesetzmäßige Ableitung des Zahlensystems — oder, wenn man so sagen will, seine „formale Bestimmung" — in Wahrheit gar nicht gesetzmäßig ist, denn niemand kann uns sagen — wenn es nicht die „Macht der Gewohnheit" ist — was nun aus $(e + e) + e = 2 + e$ wird. Liegt die Wahl der Bezeichnungen gänzlich in unserer Hand? Und ist gar kein anderer Weg vorhanden, um von einer Zahl zur nächstfolgenden zu gelangen, als unsere Erfindungsgabe? Ist es auch kein anderes Gesetz, das uns anleitet, wie die Aufeinanderfolge zu gestalten sei, als unsere eigene Willkür?

Es kommt also, um es noch ein Mal zu sagen, bei den HANKEL'schen Betrachtungen auf Operation und Einheit an. Betrachten wir nun, wie von hier aus ein Aufbau des Systems komplexer Zahlen bewerkstelligt werden soll.

„Wir bezeichnen nämlich eine Lösung der Gleichung

$$x \cdot x = -1$$

mit $x = i$, so daß:

$$i \cdot i = -1.$$

Dabei ist i gänzlich verschieden von allen reellen Zahlen; es ist weiter nichts als ein Zeichen für ein eingebildetes

---

[1]) „Verschiedene solcher Systeme erhält man, indem man zu verschiedenen Einheiten übergeht . . ." HANKEL *Theorie (36)* S. 5.

[2]) HANKEL *Theorie (36)* S. 36.

mentales Objekt, welches man die imaginäre Einheit nennt, dessen gewöhnliches Wesen aber in der reinen Theorie ganz unbestimmt bleibt und bleiben muß, da wir uns in dieser nur mit seinen formalen Verknüpfungen zu beschäftigen haben, deren Gesetze wir nach dem Prinz p der Permanenz bestimmen werden."[1]) Den letzten Worten entsprechend wird durch die Formeln: $A \cdot i = i \cdot A$; $(A + B) \cdot i = (A \cdot i) + (B \cdot i)$, die Verknüpfung einer reellen Zahl A mit der imaginären Einheit als (gewöhnliches arithmetisches) Produkt gedeutet; und daran anschließend durch die Formel $B + (A \cdot i) = A \cdot i + B$ die Verbindung einer reellen Größe B mit einem Produkt $A \cdot i$ als Summe bestimmt. Daraufhin lassen sich dann in bekannter Weise die Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen als assoziativ, kommutativ und zueinander distributiv darstellen.[2]) Ganz analog bestimmt HANKEL die höheren komplexen Zahlen

$$\alpha = \alpha_1 \iota_1 + \alpha_2 \iota_2 \quad \ldots + \alpha_n \iota_n$$

als Summe von Produken $\alpha_\lambda \iota_\lambda$,[3]) und dann weiterhin deren Operationen in verschiedener Anordnung.

Durch diese Erwägungen hat HANKEL nicht nur den Begriff des Zahlensystems, sondern sogar den der einzelnen Zahl auf den der Operation „formal" zurückzuführen versucht. Der Ansicht freilich, daß der Begriff der Operation und der sie beherrschenden Gesetze allein ausreiche, um die Zahl und insbesondere die komplexe Zahl in ihrem wissenschaftlichen Zusammenhang erkennen zu lassen, können wir nicht zustimmen. Denn mindestens ebenso stark ist für die Besonderheit des Zahlensystemes die ihr zugrunde gelegte Einheit maßgebend. In ihrer Bestimmung liegt auch entschieden ein Unterschied grundsätzlicher Art zwischen natürlichem und komplexem System bei der HANKEL'schen Darstellung.

Während nämlich die „Eins" ihrem Begriffe, also ihrem Wesen nach ganz präzis und scharf erklärt worden ist — als Modul der Muliplikation —, während durch eine

[1]) HANKEL *Theorie (36)* S. 67.
[2]) HANKEL *Theorie (36)* S. 67.
[3]) HANKEL *Theorie (36)* S. 99.

ausführliche Darstellung der ihn bedingenden Elemente der Operation der Modulbegriff vorher gesichert wurde, hüllt sich HANKEL über den hier plötzlich auftauchenden ueuen Begriff „Lösung einer Gleichung“ in Schweigen. Alle die Fragen der Algebra stehen hier auf, ob denn jede Gleichung auch sicher eine Wurzel habe; und wieviele, wenn *eine*? und alle die anderen Fragen. Man könnte hier geradezu an die Konstruktion eines logischen Kreisschlusses gehen: der Fundamentalsatz der Algebra wird zur Konstruktion der komplexen Zahlen als gültig vorausgesetzt, in der Foım nämlich, daß die Gleichung $x \cdot x = -1$ eine Wurzel haben soll, er aber setzt, zum mindesten in seiner heute fast durchweg üblichen Formulierung, den Körper der komplexen Zahlen als bereits existent gedacht voraus.

Es ist in der Tat nicht recht einzusehen, wie diesem Schlusse ausgewichen werden könne. Und so könnte es scheinen, als ob HANKEL'S Werk für *unsere* Fragestellung gar keine Ergebnisse zeitigte. Das wird noch verstärkt, wenn man folgendes berücksichtigt:

HANKEL hat zwar nachgewiesen, von welch fundamentaler Bedeutung die *Handhabung* der Operationen für den Begriff des Zahlensystems und der einzelnen Zahl ist, aber die Deutung, die er dieser Tatsache gegeben hat, ist durchaus nicht einwandfrei. HANKEL setzt nämlich als selbstverständlich voraus, daß der Begriff der Operation und ihre Eigenart unabhängig von dem Etwas, an dem operiert wird, entwickelt werden kann. Nun ist aber zu bemerken, daß bei seiner Theorie eine selbstverständliche Voraussetzung die ist, daß jede Art von betrachteten Größen *mehrere* Operationen zuläßt. Mag das nun richtig sein, oder mag man es als zunächst unbewiesenen Satz bis zu seinem Beweise bestreiten dürfen, sicher wird dabei auf alle Fälle an dieser Stelle bereits der Begriff der natürlichen Zahl angesetzt. Und sei es nur in der Form, daß die Multiplikation als *zweite* Operation einer bestimmten Art (der assoziativen Operationen nämlich) bestimmt wird.

So ist hier zum mindesten ein Fehler im *Aufbau* des Systems.

Demgegenüber ist als positives Resultat zu verzeichnen, daß wenn es gelingt, die imaginäre Einheit (als Wurzel der Gleichung oder irgendwie anders) einwandfrei zu definieren, daß dann durch die HANKEL'sche Theorie der Permanenz nachgewiesen worden ist, daß im Bereich der komplexen Zahlen eine Algebra mit ähnlichen Grundgesetzen gelten kann, wie sie im Bereich der reellen Zahlen existiert. Dadurch war — nach den einleitenden Erwägungen dieses Paragraphen, die Möglichkeit der „Erweiterung" des Zahlbereiches bis zu den komplexen Zahlen dargetan. Es war nun eine wichtige Frage, ob damit der Bereich dessen, was man mit Recht als „Zahl" bezeichnen könne, abgeschlossen sei. Dieses schon von GAUSS bejahend beantwortete Problem — GAUSS hatte aber keinen Beweis für die Berechtigung seiner Antwort angegeben — wurde in Angriff genommen, nachdem die Untersuchungen von GRASSMANN und HANKEL die dazu nötigen Voraussetzungen geschaffen hatten. Da es klar ist, wie wichtig auch für uns die Entscheidung dieser Frage ist, wollen wir kurz die gegebenen Lösungen skizzieren.

Unter zweierlei verschiedenen Gesichtspunkten wurde diese Frage erörtert und ebenso bejahend, wie von GAUSS, so von WEIERSTRASS, PETERSEN und DEDEKIND als ersten öffentlich beantwortet.[1]) Wir heben im folgenden kurz Ziel, Ergebnis und Durchführung hervor — letztere unter Berücksichtigung der für uns maßgebenden Betrachtungen.

Die Absicht aller Untersuchungen ist, die GAUSS'sche Behauptung nachzuprüfen: „Der Verfasser (GAUSS) hat sich vorbehalten, den Gegenstand (die komplexen Größen), welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig weitläufiger zu bearbeiten,

---

[1]) WEIERSTRASS *Zur Theorie ... (113)*, PETERSEN *Kompl. Zahlen (80)*, DEDEKIND *Zur Theorie (19)* und *Erläuterungen (20)*. Genauere Zitierung wird nur bei Verwechslungsmöglichkeiten gegeben. — Die im Anschluß hieran erscheinenden Schriften von HÖLDER *Kompl. Zahlen (49)* und STUDY *Systeme (105)* beschäftigen sich mit wesentlich anderen Fragen und bleiben daher unberücksichtigt.

wo denn auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird."

WEIERSTRASS wendet diese Worte nun so: „Aus dieser Bemerkung scheint mir hervorzugehen, daß GAUSS darüber Untersuchungen angestellt habe, ob sich für komplexe Größen mit n Haupteinheiten die Grundoperationen Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division so definieren lassen, daß die im Gebiete der sogenannten reellen Zahlgrößen (der Größen mit einer Haupteinheit) bestehenden arithmetischen Gesetze ihre Gültigkeit behalten, und daß er dabei zu der Überzeugung gekommen sei, es sei dies unmöglich, sobald $n > 2$." Bei dieser Auffassung sind es also nicht eigentlich die komplexen Größen mit zwei und mehr Haupteinheiten, die unmittelbar miteinander verglichen werden, sondern deren algebraische Gesetzmäßigkeiten.

Die Untersuchung geht nun folgenden Gang: „Nach Aufstellung des Begriffs einer aus n Haupteinheiten gebildeten Größe ist zunächst zu untersuchen, ob und wie sich für ein Gebiet solcher Größen, d. h. für die Gesamtheit der aus denselben Haupteinheiten $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ gebildeten Größen die arithmetischen Grundoperationen so definieren lassen, daß erstens, wenn a, b, c beliebige Größen des Gebietes sind,

$$a + b,\ a - b,\ a \cdot b,\ \frac{a}{b}$$

ebenfalls dem Gebiete angehören, und daß zweitens die in den folgenden Gleichungen ausgesprochenen Gesetze gelten:

$$a + b = b + a,\quad a \cdot b = b \cdot a,\quad (a + b) + c = (a + c) + b,$$

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b,\quad (a + b) - b = a,\qquad \left(\frac{a}{b}\right) \cdot b = a,$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Als besonders wichtig erweist sich, wie bei GRASSMANN, auch hier die Multiplikation.[1]) Namentlich ist es

[1]) Ähnliches zeigte sich ja schon bei GRASSMANN (S. 54 d. A.)

von Wert, festzustellen, wann ein nach den obigen Regeln definiertes Produkt den Wert 0 annehmen kann.[1]) WEIERSTRASS führt hierbei den Begriff des „Teilers der Null“ ein. Das ist eine derartige Grüße b, der sich eine von 0 verschiedene Größe c derart multiplikativ zugesellen läßt, daß $b \cdot c = 0$ ist. Nun lassen sich, nach WEIERSTRASS, in allen Systemen, für die $n > 2$ ist, von Null verschiedene b finden, doch auch in einigen Gebieten mit nur zwei Haupteinheiten. In all diesen Gebieten kann also ein Produkt Null werden, ohne daß einer der beiden Faktoren es wird.[2])

Sodann wird der Satz untersucht, daß eine algebraische Gleichung nur dann für unendlich viele Werte der Variabeln identisch Null wird, wenn alle ihre Koeffizienten Null sind. Dieser Satz scheint in der Algebra der allgemeinen komplexen Zahlsysteme nicht mehr zu gelten. Aber WEIERSTRASS deckt ein Analogon auf: „Daß im allgemeinen, d. h. wenn bei der Festsetzung des Multiplikationsverfahrens nur spezielle — bestimmt anzugebende — Wertsysteme ausgeschlossen werden, eine algebraische Gleichung nur in dem Falle, wo alle ihre Koeffizienten aus einem und demselben Teiler der Null durch Multiplikation desselben mit beliebigen Größen hervorgehen, unendlich viele Wurzeln haben könne.“

Die zwei leitenden Gesichtspunkte von WEIERSTRASS bei dieser Untersuchung lassen sich folgendermaßen wiedergeben: „Es sollten nicht nur für das Addieren, Multiplizieren usw. komplexer Größen die in den obigen Gleichungen ausgesprochenen formalen Gesetze gelten, sondern es sollten zugleich zwischen der Arithmetik der allgemeinen kom-

---

[1]) Die Wichtigkeit einer hierüber entscheidenden Regel ist bereits von HANKEL erkannt worden (HANKEL *Theorie (36)* S. 70).

[2]) WEIERSTRASS teilt nur diese Behauptung mit. Von deren Richtigkeit überzeugt man sich leicht, etwa so: Man konstruiere Paare (a, b) mit folgenden Regeln: $(a, b) = (c, d)$, wenn $a = c$ und $b = d$ ist; $(a, a) = a$; $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b).(c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$. Die Gesetze des Addierens und Multiplizierens bleiben erhalten. Aber: $(a, 0) \neq 0$, und: $(0, b) \neq 0$, und trotzdem: $(a, 0) \cdot (0, b) = (0, 0) = 0$! Die Produktgleichungen der Einheiten würden hierbei sein: $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 \, e_2 = 0 = e_2 \, e_1$.

plexen Größen und der aus einer Haupteinheit gebildeten Größen nur solche Unterschiede bestehen, die in der Natur der Sache begründet sind, d. h. welche sich herausstellen, wie man auch unter Aufrechterhaltung der ersten Forderung die arithmetischen Operationen definieren möge."

Dabei ergibt sich nun folgender Hauptsatz: „Sind beliebig viele Größen a, b, c... eines Gebietes gegeben und es soll aus denselben durch eine bestimmte Rechnung, bei der nur die elementaren Rechnungsoperationen in Frage kommen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division), eine andere Größe abgeleitet werden, so erhält man die Komponente der letzteren für jedes Teilgebiet..., wenn man die vorgeschriebene Rechnung mit den Komponenten der Größen a, b, c ... ausführt."

Es läßt sich weiter für allgemeine komplexe Größen der in der Algebra der reellen Zahlen so wichtige Satz nachweisen, daß die Gleichung

$$a + b x + \ldots + k x^{\varkappa} = 0$$

nicht befriedigt werden kann, wenn alle Koeffizienten mit Ausnahme des ersten verschwinden, sowie daß diese Gleichung genau $\varkappa^{\frac{n}{2}}$ Wurzeln hat, wenn man die Lösungen auf das betreffende Gebiet einschränkt, das dann eine gerade Ordnungszahl n haben muß. Alles das steht in strikter Analogie zur Algebra der reellen oder gemeinen komplexen Zahlen.

WEIERSTRASS ist nun der Ansicht, GAUSS habe seine Behauptung darauf gründen wollen, daß für Systeme mit mehr als zwei Haupteinheiten sich stets „Teiler der Null" finden lassen, die selbst von Null vrschieden sind, aber so, daß das Produkt zweier von Null verschiedener Faktoren selber sehr wohl den Wert 0 annehmen kann. Diese Erkenntnis habe ihn bewogen, die Algebra der allgemeinen komplexen Zahlen für gänzlich verschieden von der der reellen Zahlen zu halten, und somit diese Größen selber für unzulässig zu erachten. WEIERSTRASS aber deutet seine eigenen, eben kurz skizzierten Ergebnisse so, daß die komplexen Systeme aus mehr als zwei Haupteinheiten

zwar nicht geradezu für unzulässig, wohl aber für überflüssig in der Algebra erkläärt werden können. „In der Tat geht aus dem oben ... ausgesprochenen Satze hervor, daß die Arithmetik der allgemeinen komplexen Größen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus der Theorie der Größen mit einer oder zwei Haupteinheiten ableitbar wäre."

Ganz parallel zu diesem Resultat schließt PETERSEN seine Untersuchung ab: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein System von Operationsgleichungen eine zulässige Algebra charakterisiert, ist, daß es n Systeme von reellen oder komplexen Zahlen gibt, welche diese Gleichungen befriedigen und deren Determinante einen von 0 verschiedenen Wert hat. Jedem System, welches nicht nur reelle Zahlen enthält, muß ein anderes zur Seite stehen, das von den konjugiert komplexen Zahlen gebildet wird. — Statt der Operationsgleichungen können n beliebige Systeme von Zahlwerten gegeben werden, welche die aufgegebene Beschaffenheit besitzen. — Alle zulässigen Systeme können durch lineare Substitutionen mit reellen oder komplexen Elementen ineinander übergeführt werden."

In anderem Sinne faßt dagegen DEDEKIND die Ausschließung höherer komplexer Zahlen aus der Algebra auf. Er weicht von der Auffassung WEIERSRTASS' — nach seinen eigenen Worten — „in dem Hauptpunkte ab, daß ich den Größen, welche im vorstehenden allgemeine komplexe Größen genannt werden, den Charakter der Neuheit gänzlich versage; es handelt sich in unserm Jahrhundert nicht mehr um ihre Zulassung, sie sind vielmehr schon lange und mit großem Erfolge in der allgemeinen Arithmetik zugelassen; sie bilden, wie gesagt, keine neue — oder um buchstäblich mit GAUSS zu reden — keine andere Art von Größen, sondern sie sind geradezu identisch mit den überall in der Algebra eingebürgerten mehrwertigen Zahlen. Es ist unmöglich, jene von diesen zu unterscheiden; und die letzteren bilden bei folgerichtiger Ausbildung ihres Begriffes auch schon die erwähnte Erscheinung dar, daß ein Produkt aus nicht verschwindenden Faktoren sehr wohl verschwinden

kann. In allem diesen glaube ich die Bestätigung und die volle Bedeutung des Ausspruches von GAUSS zu finden."

Zur Erläuterung werden Beispiele angeführt, von denen wir wenigstens eines hier wiedergeben wollen: Die Produkte der Einheiten e_1, e_2, e_3 werden für ein System, wie folgt, bestimmt: $e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3$ $e_2^2 = e_3$, $e_3^2 = -e_3$, $e_2 \cdot e_3 = -e_2$, $e_3 \cdot e_1 = -e_2 + e_3$, $e_1 \cdot e_2 = e_2 + e_3$. „Alle Bedingungen der WEIERSTRASS'schen Theorie sind erfüllt, aber ich kann die Haupteinheiten e_1, e_2, e_3 nicht für eine neue Art von Größen ansehen, weil sie schlechterdings nicht zu unterscheiden sind von den gewöhnlichen mehrwertigen Zahlen $e_1 = 1 + r$, $e_2 = r$, $e_3 = r^2$, wo r jede Wurzel der kubischen Gleichung $r^3 + r = 0$ bedeutet."

Mag nun die eine oder die andere Art der Auffassung dem, was GAUSS vorschwebte, näher kommen[1]), das Eine ist jedenfalls durch die eben betrachteten Untersuchungen nachgewiesen daß die Algebra der höheren komplexen Zahlen gegenüber der Algebra der reellen oder der gewöhnlichen komplexen Zahlen nichts Neues mehr bieten kann. Dieses Resultat bleibt bestehen, mag man nun die „n-dimensionale" Algebra in der Algebra mit ein oder zwei Haupteinheiten vollständig aufgehen lassen, oder die erstere „nur" in gesetzmäßige Abhängigkeit von der letzteren bringen.

Es sind sämtliche Möglichkeiten des algebraischen Operierens mit höheren komplexen Zahlen auf die Operationen an gewöhnlichen komplexen Zahlen zurückgeführt.

Es bleibt nun für unsere Fragestellung aber noch ein wichtiger Punkt in den betrachteten Untersuchungen aufzuklären: Werden die komplexen Zahlen aus n Haupteinheiten mit Hilfe der reellen oder gemeinen komplexen Zahlen auch ihrem Begriffe nach von Anfang an und nicht nur in Hinsicht der an ihnen ausgeführten Operationen

---

[1]) Uns will es scheinen, als ob die DEDEKIND'sche Auffassung tatsächlich dem historischen Verständnis von GAUSS näher käme (vgl. DEDEKIND *Erläuterungen (20)* S. 6f.).

bestimmt? Oder ist das Umgekehrte der Fall, werden also die reellen und gewöhnlichen komplexen Zahlen ausschließsich als Spezialfall der Zahlen aus n Haupteinheiten betrachtet? Ist es die Absicht, den allgemeinen Begriff der komplexen n-dimensionalen Zahl den Untersuchungen derart zugrunde zu legen, daß nur unter seiner Voraussetzung der der reellen und komplexen Zahl mit zwei Haupteinheiten einen Sinn hat?

Es scheint fast so, als neige z. B. WEIERSTRASS mit seiner Erklärung der reellen Zahl als einer „komplexen Zahl mit *einer* Haupteinheit" der Bejahung der letztgestellten Frage zu. Und doch ist nicht zu leugnen, daß eine konsequente Durchführung dieses Standpunktes Schwierigkeiten machen würde. Denn es ist nicht recht abzusehen, aus welchem „Begriffsbereich" man bei dieser Sachlage die zur Aufstellung des Begriffes der allgemeinen komplexen Zahl notwendigen Koeffizienten der Einheiten (die „Ableitzahlen" nach GRASSMANN) nehmen will. Man kann doch nicht, ohne sich begrifflich im Kreise zu drehen, einen Sonderfall des erst aufzustellenden Begriffes zur Aufstellung dieses letzteren benutzen! Auf diesem Wege machen uns die Aufstellung der *Einheiten* und der *Operationen* keine Schwierigkeiten; für diese beiden Bestandteile der allgemeinen komplexen Zahl stehen uns vielmehr viele Möglichkeiten zur Verfügung, nämlich alle diejenigen, die den Begriff der reellen Zahl oder der gemeinen komplexen Zahl nicht voraussetzen (also z. B. *nicht* die Möglichkeit $e = \sqrt{-1}$). Aber dasjenige, womit an den Einheiten operiert werden soll, *das* ist es, was bei der WEIERSTRASS'*schen* Auffassung sich der begrifflichen Klarstellung entzieht. Denn solange diese ableitenden Elemente nicht irgendeinem Systeme entnommen sind, solange — mit anderen Worten — für sie nicht bestimmte Verknüpfungsgesetzte und Möglichkeiten, sie aus Einheiten abzuleiten, vorliegen, ist nicht recht abzusehen, wie man die verschiedenen aus beliebigen Haupteinheiten *durch beliebige Koeffizienten* (von denen wir nicht wissen, ob sie sich *später* einmal als reelle oder gemeine

komplexe Zahlen werden darstellen lassen) abgeleiteten komplexen Größen in ein System bringen will.

Wählt man andererseits, wie HANKEL es getan hat, den Weg, daß man den Begriff der allgemeinen komplexen Zahl unter Voraussetzung des der reellen ableitet, so tritt die Frage nach der begrifflichen Besonderheit der Einheiten in den Vordergrund.[1])

Da sich, wie wir gesehen haben, alle höheren Systeme auf das der gemeinen komplexen Zahlen zurückführen lassen — in dem Sinne, daß sie keine neuen Resultate, keine mathematischen „Überraschungen" in sich tragen —, so bleibt als Brennpunkt der Frage bei der HANKEL'schen Auffassung nur die Bestimmung des „i" übrig. Wir wissen, daß, wenn sich durch es eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ darstellen läßt, dann die ganze Theorie der komplexen Zahlen gesichert ist. Ob sich nun aber und in welcher Weise einwandfrei klarmachen läßt, daß eine solche Lösung existiert, die die nötigen Gesetze erfüllt, diese Aufgabe zu lösen, wäre sonach der Rest der mathematischen Analyse des Begriffes der komplexen Zahl.

Man wird am einfachsten — auch im Hinblick auf den Begriff der allgemeinen komplexen Zahl — so verfahren, daß man das Zeichen i mit Hilfe des vorgegebenen Begriffes der reellen Zahl zu erklären sucht. Allerdings muß man sich dabei bewußt sein, daß man nicht etwa, wie es CAUCHY versucht hat, einfach i als reelle Zahl dekretieren darf; sondern es muß mit Hilfe des Begriffes der reellen Zahl ein neues Objekt der mathematischen Untersuchung zugänglich gemacht werden, das sich als geeignet erweist, die Gleichung $x^2 = -1$ zu befriedigen.[2])

---

[1]) Das zeigt sich namentlich, wenn die Einheiten in der Form 1 und $\sqrt{-1}$ auftreten, wie in: SERRET *Algebra (99)* S. 69; auch THOMAE *Abriß (109)* S. 1.

[2]) Eine Theorie eigener Art scheint LIPSCHITZ in seinem *Lehrbuch der Analysis* verfolgt zu haben. Er gründet, wie wir seinen *Mitteilungen . . . (66)* entnehmen, die Rechnung mit komplexen Zahlen auf die „fundamentale algebraische Tatsache", daß sich jedes Produkt von zwei Summen zweier Quadrate wieder als Summe

Die Lösung, die heute wohl ziemlich allgemein anerkannt ist, stammt von W. R. HAMILTON.[1]) Wir führen nach ihr folgenden Begriff ein: Zwei reelle Zahlen a_1, a_2 sollen zu einem Paare $A = (a_1, a_2)$ vereinigt werden. Für diese Paare A sollen nun Rechenregeln gegeben werden, so daß Summe, Produkt, Differenz, Quotient von Paaren genau denselben Regeln gehorchen, wie die entsprechenden Zusammenstellungen von reellen Zahlen[2]); z. B. daß sich die genannten Verknüpfungsresultate wieder als Paare darstellen lassen. Als zweite Bedingung tritt nun noch hinzu, daß man in allen Rechnungen das Paar $A_0 =$

---

zweier Quadrate darstellen läßt. Hiernach erscheint „die Rechnung mit komplexen Größen als eine spezielle Art der Rechnung mit reellen Größen" (LIPSCHITZ *Mitteilungen (66)* S. 591).

[1]) HAMILTON *Lectures (35)* S. 8ff. — Die Kritik, die HANKEL an der Theorie HAMILTON's übt, und die Befürchtungen, die er ausspricht, sind durch die Entwicklungen der neueren Theorie nicht bestätigt worden. — Auch die Einwendung PRINGSHEIM's, daß diese Art der Einführung komplexer Größen willkürlich sei, hält nicht Stich, da die Einteilung willkürlich-natürlich dem subjektiven Geschmack des Einteilenden zu sehr unterliegt. (PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 536 Anm. 1; vgl. S. 945f.) — Das Lehrbuch, das die Einführung der komplexen Zahlen durch Paare am ausführlichsten und geschlossensten darstellt, dürfte wohl das von KOWALEWSKI *Kompl. Zahlen (65)* sein, vgl. auch die Entwicklungen in WEBER-WELLSTEIN *Enzykl. (112)* sowie den Enzyklopädieartikel von STUDY *Kompl. Größen (106)*. — Unsere Darlegungen sind deswegen hier so kurz, weil wir die Theorie als in den Einzelheiten bekannt voraussetzen.

[2]) Neuerdings hat BIEBERBACH nachgewiesen, daß die komplexen Zahlen im wesentlichen als die einzigen Zahlenpaare betrachtet werden können, die dieser Bedingung genügen. Man kann mit diesem Beweis die Linie der WEIERSTRASS'schen Untersuchungen hierüber für abgeschlossen halten (BIEBERBACH *Kompl. Zahlen (4)*). — PASCH hatte ähnliche Untersuchungen über das Verhältnis der komplexen Zahlen $a + bi$ zu den binären $(a|b)$ angestellt, war jedoch zu einem abschließenden Resultat nur unter Voraussetzung der speziellen Summenfunktion $(a|b) + (c|d) = (a + c|b + d)$ gelangt (PASCH *Imaginäre (75)*). — HÖLDER hatte nachgewiesen, daß das unter Umständen auch in Betracht kommende System der Quaternionen nicht in dem Sinne, wie die komplexen Zahlen, abgeschlossen sei (HÖLDER *Quaternionen (49)*).

(a, 0) durch die reelle Zahl a und umgekehrt ersetzen können dürfe. Es ist natürlich zu zeigen, daß sich diese beiden Bedingungen miteinander vereinigen lassen. Wenn der Nachweis, den wir hier als erbracht annehmen können, gelungen ist, so ist damit die gesamte Algebra der reellen Zahlen in die eines Teiles der Algebra der Paare übergeführt.

Damit aber nicht genug. Es findet sich nämlich bei Berücksichtigung dieser Sachlage, daß die gegebene Gleichung $x^2 + 1 = 0$ durch unsere Festsetzungen in die folgende übergeführt wird: $(x, y)^2 + (1, 0) = (0, 0)$ und es läßt sich nun leicht nachweisen, daß als Lösung dieser Gleichung nur die beiden Werte (0, 1) und (0, — 1) in Betracht kommen, dieselben, die wir mit i und — i bezeichnen und daraus die Darstellung der Paare $(a_1, a_2) = a_1, + a_2 \cdot i$ herleiten können.

Dieses ganze Verfahren erinnert sehr an ARGAND und HOUEL. Und doch ist es in seinem Grundgedanken gänzlich von den Überlegungen dieser Forscher verschieden. Es handelt sich bei der Definition durch Paare und der daran sich anschließenden Überlegungen nicht mehr um das Einführen einer nur in einem bestimmten Gebiet gültigen Repräsentativ —, sondern um die Aufstellung einer allgemein identischen Gleichung. Damit ist jener Schritt vollzogen worden, den wir damals vermißten; es ist dasjenige aufgedeckt worden, was uns berechtigt, die Zahl — 1 mit der Strecke $1_{\frac{\pi}{2}}$ in vollkommene Analogie zu setzen.

Es ist auch in den Paaren dasjenige Bestimmungsstück gefunden worden, das uns die Frage nach der Gesamtheit aller der komplexen Rechnung zugänglichen Größen einwandfrei beantwortet[1]): Alles, was einer „paarweisen“ Bestimmung durch reelle Zahlen fähig ist. Einen Teil dieser Größen bilden die gerichteten Strecken, einen Teil die

[1]) Eine Frage, wie sie ganz ähnlich schon THOMAE gestellt hat: „. . . ob es nicht Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen gibt, deren Punkte sich den (komplexen) Zahlen nicht eindeutig uzordnen lassen . . .“ THOMAE *Abriß 1890 (109)* S. 2.

Punkte der GAUSS'schen Zahlenebene, einen Teil die geometrischen Würfe V. STAUDT's.

Durch diese Überlegungen ist der sich uns zunächst als allgemeinster mathematischer Ausdruck des Zahlbegriffes darbietende Begriff der komplexen Zahl mit dem der reellen Zahl so in Verbindung gesetzt, daß er ohne den letztgenannten nicht denkbar ist. Der Diskussion der reellen Zahl gilt nunmehr unser Augenmerk.

B. Die reellen Zahlen.

§ 13. Das Infinitesimale.

Mit dem Aufrollen dieser Frage sind wir in einen Gedankenkreis eingedrungen, der — im Gegensatz zu dem eben durchmessenen der imaginären Zahlen — so alt ist, wie die wissenschaftliche Mathematik selbst.

Die Quadratur des Zirkels, die Dreiteilung des Winkels, die Würfelverdoppelung, die Inkommensurabilität der Diagonale und Seite eines Quadrates — das alles sind im Grunde genommen nur Beispiele einer nie abreißenden Kette von Fragen, die sich an das „Pythagoräische Prolbem“ — wie es WEYL nennt[1]) — anschließen: Wie ist der Zusammenhang zwischen Rational- und Irrationalzahlen zu denken?

Es war naheliegend, daß man bei der Auffassung der Mathematik als „messender Größenlehre“ auf dieses Problem zuerst dadurch gebracht wurde, daß man feststellte, daß es inkommensurable Größen gibt. Indessen machte sich die Schwierigkeit hierbei noch nicht in aller ihrer Weite fühlbar. „Akut“ wurde sie erst, nachdem LEIBNIZ seine berühmten Worte geschrieben hatte: „dx est quaedam modificatio ipsius x“. Denn eben durch die Wichtigkeit, welche die Worte erhielten — da sich auf sie eine ungeheuer resultatreiche Wissenschaft gründete — wurde man ver-

---

[1]) WEYL *Kontinum (114)* S. III. — So wie WEYL die Problemlage faßt, ist die Theorie der Irrationalzahlen nur ein Beispiel für das Kontinuumproblem. Bei solcher Darstellung ist vielleicht — historisch betrachtet — der Name des PYTHAGORAS mehr am Platze, als bei unserer Auffassung.

anlaßt, der Natur dieses „quaedam“ ein wenig näher nachzuforschen. Es ist bekannt, wie bei der Diskussion hierüber zunächst das Wort „unendlich-klein“ lebhaft in Aktion trat. Solch ein Inifinitesimales war nun aber bald Etwas, bald Nichts, bald Keines von Beiden oder Beides oder zwischen Nichts und Etwas; bald war das Infinitesimale selber, bald waren nur die Verhältnisse unendlich kleiner Größen der einzig würdige Gegenstand der Differentialrechnung. Auf alle diese Verwirrung in den Lösungen gehen wir hier nicht ein.[1])

Lange Zeit wurde von manchen Philosophen für das allein Rettende aus diesem Streit der Begriff der ‚intensiven Größe“ ausgegeben[2]), im Gegensatz zur „extensiven Größe“ (der als „Vielheit gleichmäßiger Teile“ gedachten[3])) genommen. Es ist nun zwar leicht einzusehen, daß damit die Frage nicht gelöst, sondern nur verhüllt ist. Denn was soll man zu dem Begriff einer „Größe“ sagen, die als solche meßbar und doch in einem begrifflichen Gegensatz zu etwas lediglich aus (gleichmäßigen) Teilen zusammengesetzt Vorstellbarem stehen soll? Wir wenigstens können hier nur GAUSS zustimmen, der ausschließlich die extensive Größe mathematischer Betrachtung für zugänglich erklärt und die intensive Größe nur insoweit zuläßt, als sie extensiv gemacht werden kann.

Die Mathematiker hatten im 19. Jahrhundert kaum Zeit, sich um die Lösungsversuche zu bekümmern, die ihnen von — meist ungeschulter — philosophischer Seite angeboten wurden und sich über die Fehler oder ihnen

---

[1]) Daß sich solche mathematischen Erörterungen selbst in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts verirren konnten, dafür liegt ein Beispiel in BRAND's *Grundriß (6)* vor. Dieser konstruiert aus dem Zenonischen Paradoxon von Schildkröte und Achilles das „Urdifferential“, d. i. den nicht mehr teilbaren, absolut kleinsten Teil einer Größe.

[2]) Vgl. COHEN *Prinzip (16)*, sowie FREYER *Studien (30)*.

[3]) Durch diese Worte suchen wir die Definitionen von KANT (*Kr. r. V. (55)* S. 202) und GAUSS (*Sertorius* v. *W. (31)* S. 98) zu vereinigen (vgl. VOSS, *Wesen (111)* S. 25 Anm.).

geeignet erscheinenden Ansätze zu unterrichten,[1]) sie arbeiteten an der folgerichtigen Ausgestaltung und Verwertung des „limes". Der Grenzwertbegriff war entdeckt und freudig von den Mathematikern — wenigstens teilweise, aber in immer mehr zunehmendem Maße — begrüßt worden, um aller „unendlichen" Schwierigkeiten Herr zu werden.

Für jeden, der den Begriff der Irrationalzahl in seinen verschiedenen Wandlungen durchforscht, d. h. die verschiedenen Versuche betrachtet, die gemacht werden um die unterschiedlichen Bestandteile von ihm festzustellen, ergibt sich zunächst eine außerordentlich nahe Verwandtschaft zwischen Begriffen, wie „dx" und „$\sqrt{2}$".

Daher ist es kein müßiger Spaziergang, sondern ein lehrreicher, wenn auch von der geraden Linie unserer Disposition etwas abweichender Weg, den Untersuchungen über die Irrationalzahl einiges aus den Betrachtungen der letzten Jahrzehnte über die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung voranzuschicken.

Wir wollen nur einen kurzen Einblick in Untersuchungen mit und ohne Verwendung des Grenzwertbegriffes tun. Letzterer ist ja in unserer Zeit derart zur Herrschaft gelangt, daß man ihn fast als Grenzscheide zwischen „elementarer" und „höherer" Mathematik bezeichnen kann.[2])

---

[1]) Erst seit dem Anfang des 20. Jahrhunderts, seitdem also die Philosophie Sachkundige vorschicken konnte, haben sich Mathematiker gefunden, die eine Sichtung der philosophischen Ansichten (etwa von CASSIRER, HUSSERL, LIPPS, NATORP) vornahmen. Der Anfang einer auf wirklicher Sachkunde und nicht nur gelegentlich zusammengerafften Kenntnissen beruhenden Erörterung scheint uns bei FREGE *Grundlagen (29)* zu suchen zu sein. Neuerdings hat auch VOSS (*Wesen (111)*) eine verständnisvolle Kritik philosophischer Meinungen geliefert. — Als Gegensatz dazu führen wir die Klagen über die „philosophische" Schreibart von GRASSMANN an, denen noch ENGEL zustimmt: „GRASSMANN's Neigung zur Abstraktion, seine philosophische Darstellungsweise wirken auf uns alle, die wir so ganz anders gewöhnt sind, zunächst abschreckend ein." GRASSMANN (Vorbemerkungen zum 1. Band seiner) *Werke (33)* S. V.

[2]) Leider ist, soviel uns bekannt, die Geschichte der Prinzipien der Infinitesimalrechnung im 19. Jahrhundert noch nicht geschrieben.

Wie man auch ohne Grenzbetrachtungen eine gewisse, wenn auch nicht vollkommen durchdringende Begriffsschärfe zu entwickeln vermag, wollen wir an dem Beispiel von PRICE zeigen.[1])

Dies Werk dürfte eines der ersten Lehrbücher sein, in dem sich ein Satz, wie der folgende, findet: „Die Differentialrechnung ist in ihrer reinen, wie in ihrer angewandten Gestalt, mag sich letztere auf Geometrie oder Mechanik beziehen, ein Zweig der Zahlenwissenschaft; ihre Zeichen sind von derselben Art und denselben Gesetzen gemäß verknüpft, in ihren Anwendungen sind sie denselben Bedingungen unterworfen, werden nach denselben Prinzipien interpretiert und führen zu analogen Ergebnissen.“[2])

Ebenso dürfte das Werk von PRICE eines der wenigen Lehrbücher sein, in denen das Integral als unendliche Summe funktionentheoretisch — nicht an einer Kurve — interpretiert wird und zwar, ohne auch nur den Ansatz von Grenz- und Konvergenzbetrachtungen zu machen, wie wir sie für unumgänglich notwendig erachten müssen.

PRICE operiert nun zwar, wie viele andere auch, mit „infinitesimals“. Aber nicht das Objekt, sondern das methodische Hilfsmittel ist für ihn bei der Differentialrechnung eben das Unendlich-Kleine. Er wüßte sonst nichts anzugeben, worin das spezifische Merkmal dieses Zweiges der Zahlenwissenschaft zu suchen sei. „In den Zweigen der Zahlenwissenschaft, die als bekannt vorausgesetzt werden, wie z. B. in Arithmetik und Algebra ist die Zahl endlich und diskontinuierlich; aber sie kann ebensogut als kontinuierliche betrachtet werden, d. h. sie ist einer verschiedenen Größe und unendlich kleinen Anwachsens fähig. Betrachtet man die Zahl in dieser Hinsicht, so hat man das, was die Infinitesimalrechnung erwägt und verfolgt: die neuen Verhältnisse hiervon, die neuen Zeichen,

---

(Der kurze Abriß in der Enzyklopädie, der den dort gestellten Zielen genügt, reicht für eine durchgreifende kritische Betrachtung keineswegs aus.)

[1]) PRICE *Infinitesimals (82)*.

[2]) PRICE *Inf. (82)* S. VII.

um diese auszudrücken und die Gesetze, denen sie unterworfen sind, danach hat sie ihre Hilfsmittel zu wählen und diese Hilfsmittel sind Infinitesimale."[1]) Worin besteht denn nun der grundlegende Unterschied zwischen endlich und unendlich klein, der über die Zugehörigkeit zur Infinitesimalrechnung entscheidet?

PRICE weicht dieser Frage keineswegs aus, sondern gibt eine klar umrissene Antwort: „Unter endlich verstehen wir dasjenige, was in den Bereich unserer Sinne fällt oder gebracht werden kann ... Daher bestimmen die Fähigkeiten unserer Sinne und unseres Geistes die Grenze dessen, was endlich ist; die Größen aber, die diese Grenzen um mehreres überschreiten, dadurch, daß sie zu groß oder zu klein sind, nennen wir unendlich große oder unendlich kleine."[2]) „Obwohl nun im allgemeinen Unendlich-Große und Unendlich-Kleine durch ∞ und 0 bezeichnet werden, liegt es doch auf der Hand, daß alle von jeder Art nicht gleich sind; und zwar unterscheiden sich nicht nur die Unendlich-Kleinen von der absoluten Null, sondern zeigen auch untereinander Unterschiede."[3]) Dasselbe gilt für die Unendlich-Großen; so daß wir folgende zwei Bezeichnungsreihen als gliedweise gleichberechtigt anerkennen, die vom Unendlich-Großen verschiedener Ordnung über das Endliche bis zu den verschiedenen Unendlich-Kleinen herabsteigen[4]):

$$\ldots x^n, \quad x^{n-1}, \quad \ldots x^2, \quad x^1, \; x^0, \; x^{-1}, \; x^{-2}, \; \ldots x^{-(n-1)}, \; x^{-n},$$
$$\ldots i^{-n}, \; i^{-(n-1)}, \ldots i^{-2}, \; i^{-1}, \; i^0, \quad i^1, \quad i^2, \quad \ldots i^{n-1}, \; i^n,$$

wenn x ein Unendlich-Großes und i ein Unendlich-Kleines erster Ordnung bedeutet.

Aus dieser Entwicklung lassen sich nun die für die folgenden Beweise grundlegenden Sätze ablesen:

I. Multiplikation mit Endlichem ändert nichts an der Größenordnung, wohl aber Potenzierung.

---

[1]) PRICE *Inf. (82)* S. VIIf.
[2]) PRICE *Inf. (82)* S. 12.
[3]) PRICE *Inf. (82)* S. 19.
[4]) PRICE *Inf. (82)* S. 20.

II. $i^n \cdot x^n = i^o = x^o$.

III. $x^n \cdot i^m = x^{n-m} = i^{m-n}$, $(m \mp n)$.

IV. $\frac{x^n}{x^n} = \frac{i^m}{i^m} = x^o = i^o$.

Daher ist $\frac{0}{0}$ unbestimmt

V. $(a \cdot i^n \pm b \cdot i^n) = (a \pm b) \cdot i^n$,

also $a \cdot i^n - a \cdot i^n = 0$.

VI. $a \cdot x + b = a \cdot x$.

VII. $a \cdot i^n + b \cdot i^{n+r} = i^n (a + b \cdot i^r)$,

und: $a + bi + ci^2 + \ldots + k \cdot i^n = a$.[1])

Daß das Differential natürlich nichts anderes ist, als eine Differenz, die unendlich-kleine Werte angenommen hat, versteht sich nach dem ganzen Grundgedanken des Werkes von selbst Und ebenso vollzieht sich auch die schon oben erwähnte Ableitung des Integrals vollkommen auf der Grundlage des Unendlich-Kleinen.

Es liegt auf der Hand, daß eine derartige Begründung der Infinitesimalrechnung einfach unmöglich ist. Denn die grundlegenden Unterschiede werden lediglich durch die Fähigkeiten unserer Sinne bestimmt.[2]) Man ist also nicht nur etwa in der Anwendung nie sicher, wann eigentlich etwas Gegebenes unendlich-klein oder unendlich-groß oder endlich ist, ob es also in den Bereich der Infinitesimalmethoden fällt oder in den Bereich der — zur Zeit von PRICE jedenfalls noch zu erfindenden — Infinitalmethoden, oder ob es mit Hilfe der Arithmetik und Algebra im gewöhnlichen Sinne behandelt werden könne. Vor allen Dingen: Soll die Infinitesimalrechnung wirklich ein „Zweig der Zahlenwissenschaft“ sein, so müßte es doch auch infinitesimale Zahlen geben. Das ist nun freilich insofern möglich, als nach PRICE'S eigenen Worten die Zahl ein „Verhältnis meßbarer Größen“ ist. Als Verhältnis ist sie aber dem Bereich unserer Sinne nicht mehr zugänglich.

---

[1]) PRICE *Inf. (82)* S. 21ff.

[2]) Auch das Wort „mind“, das wir nach althergebrachter Sitte mit „Geist“ wiedergegeben haben, dürfte an der sensualistischen Auffassung nichts ändern.

Daher müßte sie, wiederum nach der Definition von PRICE, entweder unendlich-groß oder unendlich-klein sein und zwar jede Zahl. Was tun nun aber die Zahlen der Algebra? Es gäbe nach PRICE gar keine Zahlen für die Arithmetik, und doch sind sie und ihre Gesetze als bekannt vorausgesetzt[1])!

Dieses Urteil über einen Begründungsversuch der Infinitesimalrechnung können wir nun überhaupt so erweitern: Jede Grundlegung einer mathematischen Disziplin, die empfindbare Größen als methodisches Hilfsmittel heranzieht, sei es in der Rechnung selbst oder bei der Definition der vorauszusetzenden Begriffe, ist von vornherein verfehlt.[2]) Denn es geht nicht an, dasjenige, was erst an Hand der Methoden der Rechnung bearbeitet, d. h. wissenschaftlich geklärt wird — die empfindbare Größe — bereits als notwendig zur Ausarbeitung dieser Methoden, mithin in allen seinen Bestandteilen und Beziehungen als vollständig klar erfaßt, anzusehen. Jede Begründung der Differentialrechnung daher, die sich auf den Begriff des Unendlich-Kleinen in diesem Sinne stützt, ist abzuweisen.[3])

---

[1]) Man sieht ganz klar, wo der Fehler liegt. PRICE versucht, in den angeführten Stellen die Theorie der Irrationalzahlen auf sinnlich wahrnehmbare Größenunterschiede zurückzuführen und das muß mißlingen.

[2]) Indessen ist hier wohl zu merken, daß wir erstens von der reinen, und nicht der angewandten Mathematik, und zweitens von den Methoden und nicht den Gegenständen sprechen.

[3]) Einige Beispiele der verschiedenartigen Standpunkte seien hier gestattet. — Gänzlich dem Infinitesimalen ergeben ist z. B. SCHNUSE. Besonders prägnant ist in dieser Beziehung eine Stelle: „Ref. (SCHNUSE) hat bereits an verschiedenen Stellen gezeigt, daß die sogenannte Grenzmethode weiter nichts ist als ein Hin- und Herschwanken zwischen der EULER'schen absoluten Nullentheorie und der LEIBNIZ'schen Infinitesimaltheorie, und daß sie notwendig auf letztere zurückkommen muß, wenn sie Sinn und Bedeutung haben soll" (SCHNUSE *Külp (88)* S. 763). Und ganz ähnlich in SCHNUSE *Schlömilch (87)* S. 1205ff. — Auf die sehr eingehende, wenngleich langwierige und nicht vollkommen durchschlagende Konzeption GRASSMANN's (A_2 *(84)* S. 284—292) können wir hier als auf eine

Um nun diesem Übel vorzubeugen, wurde der Grenzwertbegriff in die Betrachtungen eingeführt. Indessen würde es uns zu weit abführen, wollten wir diese Entwicklung in allen oder auch nur den wichtigsten Etappen verfolgen. Als ein Beispiel, wie tief man ging, um die Theorie der Infinitesimalrechnung sicher zu begründen, und zugleich als Zeichen, daß die Untersuchungen über Irrationalzahl und Grenzwertbegriff nicht nur unter dem Zeichen des Infinitesimalen etwas Gemeinsames aufweisen, führen wir hier einige Erörterungen aus der Grundlegung der Theorie des bestimmten Integrales an, wie sie THOMAE gegeben hat.[1])

Bei diesen Entwicklungen werden als Grundlagen nur Begriffe aus der Zahlenwelt verwendet, wie z. B. „Zahlenreihe", „Term", „Intervall". Besonders wichtig für die Begründung seiner Ansicht über die Handhabung des Grenzwertbegriffes ist, wie sich THOMAE das Rechnen mit irrationalen Zahlen und namentlich deren Vergleichung denkt: „Die Rechnung mit den irrationalen Zahlen, welche durch rationale Zahlen nur vermittelst einer unendlichen Reihe von Operationen, also eigentlich nicht dargestellt werden können, beruht auf einer Ausdehnung des Gleichheitsbegriffes. Zahlen heißen gleich, wenn man von ihnen nachweisen kann, daß sie sich um weniger, als jede dem absoluten Betrage nach noch so kleine vorgegebene (zunächst rationale) Zahl unterscheiden."

Auf solcher allgemeinen Erwägung über das Rechnen mit Zahlen baut THOMAE seine Handhabung der Grenz-

---

nach strenger Durchführung des Grenzbegriffes trachtende leider nur hinweisen. — Manche Bücher zeigen den Fehler, daß sie bei der Begründung der Differentialrechnung deren Begriffe teilweise der Anwendung dieser Disziplin entnehmen. So der sonst definitorisch aufs schärfste zugespitzte und durchgefeilte *Kursus* von SPITZ *(100)*, in dem striktissime die Grenzmethode durchgerechnet wird. — Eine Mischung von Grenz- und Infinitesimalmethode zeigt WILLIAMSON in seinem *Treatise (115)*. HOUEL behauptet endlich in seinem *Cours (52)* (S. VIIf.), daß beide Methoden identisch seien, wogegen MANSION *Résumé (70)* der Grenzmethode den Vorzug gibt.

[1]) THOMAE *Einleitung (110)*.

wertmethode auf. Mit ihrer Hilfe leitet er eine Fülle von — teilweise vollkommen neuen, meist erheblich präzisierten — Sätzen ab; bis zu dem Hauptsatze, daß das bestimmte Integral, als Grenzwert einer Summe aufgefaßt, unabhängig von der Wahl der Größe und Anzahl der einzelnen Teilintervalle bei Beginn der Teilung und nur davon abhängig ist, daß die Anzahl der Teilintervalle über alle Grenzen wächst, und zugleich die Größe jedes einzelnen Teilintervalles nach Null konvergiert.

Durch diese Beispiele glauben wir unser Ziel erreicht zu haben, das wir oben kennzeichneten. Wir nehmen insbesondere das Ergebnis mit, daß das Zurückgreifen auf empfindbare Größen sehr vom Übel ist, wenn es sich um methodische Grundlegung einer mathematischen Überlegung handelt. Tatsächlich lehnen es auch die Theorieen der Irrationalzahl, die man als klassische bezeichnen kann, durchweg ab, sich auf diesen unsicheren Boden zu begeben.

§ 14. Zurückleitung auf die Rationalzahl.

Wir haben oben (§ 10) gesehen, wie sich das Bestreben, den Begriff der komplexen Zahl mit dem der reellen in Einklang zu bringen, zunächst darin kundtat, daß man beide Begriffe in ein anderes Begriffsgebiet, das der Größe übertrug. Während hier also, historisch betrachtet, die Interpretationen oder Repräsentationen in der Geometrie den Ausgangspunkt der Entwicklung bildeten, lag die Sache bei der Fundamentierung der Irrationalzahlen von vornherein anders.

Freilich kann man auch hier an die Versuche denken, das Inkommensurable mit dem Kommensurabeln zu vergleichen; aber daß durch solche Untersuchungen zugleich ein Zusammenhang zwischen Irrationalzahlen und Brüchen — etwa zwischen $\sqrt{3}$ und $\frac{1732}{1000}$ — bestätigt werde, wird sich schwerlich irgendwo finden. Jedenfalls nicht in der prä-

zisen Fragestellung, wie sie bei den komplexen Zahlen in dieser Hinsicht vorherrschte.

Die verschiedenen klassischen Theorieen der Irrationalzahlen werden vielmehr von den Anschauungen beherrscht, die sich bei der Begründung der Analysis durchgesetzt hatten. Auf die „Sturm- und Drangperiode" des 18. Jahrhunderts war, wie KLEIN es so vorzüglich ausführt, eine Zeit der „Ernüchterung" gekommen, ein Streben nach Sicherheit und Tiefe der Grundlagen. Man ging zunächst bei der Befriedigung dieses Strebens von der Evidenz einiger Sätze aus, die sich bei der Betrachtung von Kurven von selbst darzubieten und eines Beweises wegen ihrer Selbstverständlichkeit gar nicht zu bedürfen schienen. Manche dieser Sätze aber erwiesen sich nun als falsch. So gelang es z. B. dem sehr einleuchtenden Satze daß jede Funktion in jedem ihrer Punkte, in dem sie stetig ist, auch eine Ableitung besitze, eine Funktion gegenüberzustellen, die in allen Punkten stetig und in keinem differenzierbar ist. Aus ähnlichen unnagenehmen Erfahrungen ergab sich nun die Forderung ausschließlich arithmetischer Beweisführung. „Als Besitzstand der Wissenschaft soll nur angesehen werden, was durch Anwendung der gewöhnlichen Rechnungsoperationen als identisch klar erwiesen werden kann. Ein Blick auf die neueren Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung genügt, um den großen Umschwung in der Methode wahrzunehmen.... Da werden Erörterungen vorangeschickt, was die Stetigkeit einer Veränderlichen bedeuten soll oder nicht bedeuten soll, oder ob von Differentiation oder Integration überhaupt die Rede sein kann. Das ist der WEIERSTRASS'sche Habitus der Mathematik, die WEIERSTRASS'sche Strenge, wie man kurz zu sagen pflegt. — Natürlich ist auch sie nichts Absolutes, sondern kann weitergebildet werden, indem man sich hinsichtlich der Verknüpfung der Größen noch weitergehende Beschränkungen auferlegt. Ich nenne in dieser Hinsicht KRONECKER's Tendenz, die irrationalen Zahlen zu verbannen und die mathematische Wissenschaft allein in Beziehungen zwischen ganzen Zahlen aufzulösen... Alle

diese Entwicklungen möchte ich ... unter das eine Wort: Arithmetisierung der Mathematik mit begreifen.“[1])

So gehen denn auch die verschiedenen, von der eben erwähnten Verbotdiktatur KRONECKER'S abweichenden Theorieen der Irrationalzahl darauf aus, diesen Begriff rein arithmetisch zu fassen. Das heißt, man vermeidet bei seiner Aufstellung alles und jedes, was auch nur entfernt nach „Berufung auf Anschauung“ aussieht.

Wir sehen uns nun genötigt, im folgenden die drei klassischen Theorieen von CANTOR, WEIERSTRASS und DEDEKIND noch einmal kurz zu charakterisieren, da wir nirgends eine Darstellung dieser vielzitierten und bekannten Leistungen gefunden haben, wie sie unseren Zwecken entspricht. Unser leitender Gesichtspunkt fordert nämlich eine ausführliche Betrachtung der begrifflichen Durchbildung dieser Theorieen, um die bei ihrem Aufbau vorausgesetzten Begriffe zu ermitteln.

Die beiden erstgenannten Theorieen — von CANTOR und WEIERSTRASS — hängen enger miteinander zusammen, als mit der dritten. Man könnte sie die rein arithmetischen nennen, im Gegensatz zu der, mengentheoretische Begriffe vorwegnehmenden, Theorie DEDEKIND'S. Sie sind indessen, obwohl sie sich in ihrem Grundgedanken mehr der elementaren Auffassung der irrationalen Zahl als einer Zahl, die allein der Darstellung durch einen unendlichen unperiodischen Dezimalbruch fähig ist, anschließen, doch nicht die allein beherrschenden Theorien geworden. Eher könnte man das Gegenteil behaupten, daß nämlich die DEDEKIND'sche Methode bevorzugt werde. Das geschieht — soweit sich eine derartige Behauptung überhaupt in allgemeinen statistischen Angaben erledigen läßt — namentlich da, wo es sich um die erste Einführung der Irrationalzahlen handelt und zugleich aus didaktischen Gründen etwa eine Verbindung mit der zu interpretierenden räumlichen Anschauung gewünscht wird.[2]) Bei der Fort-

---

[1]) KLEIN *Über Arithmetisierung der Mathematik* GN 1895 S. 83.

[2]) Man vgl. etwa BURKHARDT *Analysis (11)* S. 67ff.; im Gegensatz hierzu die in BURKHARDT *Elemente (12)* gegebene

führung der weiter ausgreifenden Rechnung dagegen wird man meist Methoden finden, die mehr an die CANTOR-sche oder WEIERSTRASS'sche Art der Einführung erinnern.

Die CANTOR'sche Theorie kann man kurz in folgenden Zügen beschreiben.[1])

Vorausgesetzt wird der Begriff der Rationalzahl, sowie die Definitionen für die Operationen mit diesen Zahlen. Bekannt sind insbesondere die Systembrüche einer Basis b, und aus ihnen sind als wichtig die unbegrenzt fortsetzbaren periodischen Systembrüche hervorzuheben. Hierauf werden nun folgende Begriffe aufgebaut: „Es sei irgendeine Vorschrift gegeben, vermöge deren für jeden beliebigen Stellenzeiger ν das zugehörige A_ν (einer Folge von rationalen Zahlen A_o, $A_1 \ldots$) bestimmbar ist.[2]) Ferner werde angenommen, es existiere eine rationale Zahl, A, die zur Folge der A_ν in der Beziehung steht: „Wie klein auch ein positiver Bruch ε vorgeschrieben werden möge, so soll immer eine natürliche Zahl n vorhanden sein, derart, daß

$$(1) \qquad |A - A_\nu| < \varepsilon \text{ für jedes } \nu \geqq n.^{3)}$$

Hieraus läßt sich folgern, daß, wenn es überhaupt eine den Bedingungen (1) genügende rationale Zahl A gibt, es nur eine einzige solche Zahl geben kann, mit anderen Worten, daß die Zahl A durch die Bedingungen (1) vollkommen eindeutig bestimmt erscheint.[4]) Wir wollen nun eine solche Zahlenfolge „als rational konvergent bezeichnen und dafür das abgekürzte Zeichen $\{A_\nu\}$ einführen. Da die Zahl A durch die Zahlenfolge $\{A_\nu\}$ vollkommen

---

zwar sehr bequeme, aber doch nicht einwandfreie Grundlegung (namentlich S. 15ff.); vgl. ferner: KOWALEWSKI *Grundzüge (64)* S. 4; KNOPP *Funktionentheorie (59)* S. 10f.; v. MANGOLDT *Einführung (69)* S. 135ff.; CESARO *Lehrbuch (15)*; WEBER-WELLSTEIN *Enzyklopädie (112)* S 70f.

[1]) Wir geben sie hier nach der präzisen und ausgereiften, wenngleich nicht ganz den Originalbegriffen CANTOR's entsprechenden Fassung von PRINGSHEIM *Zahlenlehre (84)* wieder.

[2]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 112.

[3]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 112.

[4]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 113.

eindeutig bestimmt ist, so wollen wir das Zeichen $\{A_\nu\}$ als Ersatzzeichen für die rationale Zahl A zulassen, setzen also geradezu

(2) $\{A_\nu\} = A.$"[1])

Alles dieses gilt auch für die rationale Zahl 0; hierbei nimmt (1) die Gestalt an:

(3) $|A_\nu| < \varepsilon$ für $\nu \geqq n.$[2])

Darauf lassen sich die Größenbeziehungen „$\gtreqless$" für rational-konvergente Zahlenfolgen aufbauen sowie die Verknüpfung durch Addition und Multiplikation.[3])

Aus der Theorie der rational-konvergenten Zahlenfolgen ergibt sich auch unmittelbar der Satz, daß jede Rationalzahl σ nur durch einen einzigen und zwar stets periodischen Systembruch σ_ν mit voegeschriebener Basis b dargestellt werden kann, so daß $\sigma = \{\sigma_\nu\}$ ist.[4])

„Nachdem wir durch die Aufgabe, einen rationalen Bruch in systematischer Form darzustellen, zu dem Begriffe der unbegrenzt fortsetzbaren periodischen Systembrüche gelangt sind, läge es schon an sich nahe, auch unbegrenzt fortsetzbare nicht-periodische Systembrüche in den Kreis unserer Betrachtung zu ziehen. Auf die Herstellung derartiger Systembrüche wird man aber mit geradezu logischer Notwendigkeit geführt, wenn man versucht, auch die Operation des Potenzierens umzukehren, und zwar zunächst in der Weise, daß man den Potenzwert und den Exponenten als gegeben, die Basis als vorläufig unbekannt ansieht.[5]) Man kann nämlich eine rational-konvergente Folge $\{\sigma_\nu{}^m\}$ herstellen, so daß bei gegebenem a

$$\sigma_\nu{}^m < a < \left(\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right)^m \tag{7}$$

und geradezu

$$\{\sigma_\nu{}^m\} = a \tag{8}$$

---

[1]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 114.
[2]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 115f.
[3]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 115.
[4]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 117.
[5]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 120f.

gesetzt werden kann.[1]) Aber „der unbegrenzt fortsetzbare Systembruch σ_ν kann in keinem Falle eine rationale Zahl darstellen. Daraus folgt zugleich, daß er ein nicht-periodischer sein muß“.[2])

Die soeben angestellte Betrachtung legt nun aber unmittelbar folgenden Schritt nahe: Angenommen es gelänge, eine neue also unter den rationalen Zahlen nicht vorkommende Zahl S so zu definieren, daß für jedes $\nu > n$

$$(17) \qquad \sigma_\nu < S < \left(\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right)$$

so hätte man, falls man noch S^m in passender Weise definieren kann:

$$(18) \qquad \sigma_\nu{}^m < S^m < \left(\sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right)^m$$

und daraus

$$(19) \qquad \{\sigma_\nu{}^m\} = S^m, \text{ also } S^m = a, \text{ und } \sqrt[m]{a} = S.^{3)}$$

„Statt nun aber die unbegrenzt fortsetzbaren nicht-periodischen Systembrüche zur Definition jener neuen Zahlen zu benutzen, scheint es zweckmäßiger, diese Definition von vornherein an einen etwas allgemeineren Typus von unbegrenzt fortsetzbaren Folgen rationaler Zahlen zu knüpfen.“[4])

„Es werde mit $c_0, c_1, \ldots c_\nu \ldots$ oder kürzer geschrieben, mit (c_ν) eine nach irgendwelcher Rechenvorschrift unbegrenzt fortsetzbare Folge rationaler Zahlen bezeichnet. Läßt sich dann jeder, insbesondere jeder noch so kleinen, positiven Zahl ε eine natürliche Zahl n so zuordnen, daß

$$(1) \qquad |c_{n+\varrho} - c_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, 3, \ldots$$

so soll $(c_0, c_{,1} \ldots, c_\nu, \ldots)$ oder kürzer geschrieben $[c_\nu]$ eine konvergente rationale Zahlenfolge heißen.“[5]) Es sind nun

---

[1]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 122.
[2]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 123.
[3]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 124.
[4]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 124.
[5]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 125.

auch die rational-konvergenten Zahlfolgen $\{c_\nu\} = c$ schlechthin konvergente Folgen.[1])

„Wir führen nun alle möglichen konvergenten Folgen $[c_\nu]$ als neue Zahlzeichen ein. Sind die betreffenden Folgen rational-konvergent, ist also $[c_\nu] = c$ (d. h. eine rationale Zahl), so bestehen für die Vergleichung und das Rechnen mit ihnen bereits die (früher) angegebenen Regeln, welche in Wahrheit lediglich Übertragungen der für ratioanale Zahlen geltenden Gesetze in die neue Schreibweise sind. Wir setzen nun fest, daß diese Regeln für alle Zeichen von der Form $[c_\nu]$ Geltung haben sollen, mit anderen Worten, wir definieren für den Fall, daß mindestens eines der beiden Zeichen $[c_\nu]$, $[c'_\nu]$ keine rationale Zahl sein sollte, deren Gleichheit bzw. Ungleichheit, sowie deren Addition und Multiplikation durch die (für rational-konvergente Folgen festgelegten) bezeichneten Formeln.“[2]) „ Jede durch eine konvergente Folge rationaler Zahlen definierte bzw. definierbare Zahl soll eine reelle Zahl heißen.“[3])

Wir sehen also, wie diese Darstellung der irrationalen Zahlen bewußt von den rationalen Zahlen ausgeht, diese in eine bestimmte erweiterungsfähige Gestalt bringt und dann, nachdem für sie die Gültigkeit der alten Rechenregeln auch in dieser neuen Art nachgewiesen ist, die Erweiterung und endlich auch für diese die Gültigkeit der alten Regeln folgen läßt.

Ähnlich geht die WEIERSTRASS'sche Theorie vor.[4]) Im Mittelpunkt der Erörterung steht hier die Erweiterung des Gleichheitsbegriffes von rationalen Zahlen auf „konvergente additive Aggregate“.

Ausgehend von der Bemerkung, daß die Umkehrung der Potenz (Wurzel) nicht im Bereich der rationalen Zahlen durchführbar sei — wobei unter rationalen Zahlen additive

---

[1]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 126.

[2]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 134.

[3]) PRINGSHEIM *Zahlenl. (84)* S. 136.

[4]) Wir führen sie nach der auf Originalarbeiten (Vorlesungen) von WEIERSTRASS aufgebauten Darstellung bei V. DANTSCHER *Vorlesungen (17)* durch.

Wiederholung der Einheit und genauen Teilen der Einheit verstanden wird — wird ein Gebiet der Mengen von unendlich vielen positiven rationalen Zahlen gefunden, in dem diese Aufgabe lösbar ist.[1]) Wenn solch eine Menge durch ein Rechnungsverfahren oder ein anderes Bildungsgesetz gegeben ist, so wird sie nach WEIERSTRASS als „Aggregat" zu bezeichnen sein. Sie wird ein „additives Aggregat" genannt, wenn jede endliche Anzahl von Gliedern desselben durch Addition verbunden gedacht wird.[2]) Danach wird nun folgende Gleichheitsdefinition aufgestellt: „Zwei additive Aggregate aus endlich oder unendlich vielen positiven rationalen Zahlen werden als gleich erklärt, wenn jeder Bestandteil des einen Aggregates auch Bestandteil des anderen Aggregates ist."[3]) Unter einem „Bestandteil" eines aus unendlich vielen positiven rationalen Zahlen bestehenden Aggregates wird die positive rationale Zahl verstanden, die entsteht, wenn man aus endlich vielen Gliedern a des Aggregates endlich vielmal die Einheit und genaue Teile der Einheit herausgreift und durch Addition verbindet.[4])

Nun zeigt es sich aber, daß diese Gleichheitsdefinition nur dann Sinn hat, wenn die Bestandteile nicht über jede Grenze wachsen, mit anderen Worten, wenn es eine positive rationale Zahl G gibt, die größer ist, als jeder Bestandteil des Aggregates. Gibt es zu einem additiven Aggregat aus unendlich vielen positiven rationalen Zahlen eine derartige Zahl, so heißt dies Aggregat konvergent.[5])

Für diese konvergenten Aggregate lassen s ch nun die Rechnungsoperationen durchführen; es läßt sich die Definition der konvergenten additiven Aggregate auf solche Mengen von rationalen Zahlen ausdehnen, die teils positive, teils negative Glieder enthalten, — und damit ist der Bereich umgrenzt, den wir gewöhnlich als den der reellen Zahlen zu betrachten pflegen.

---

[1]) v. DANTSCHER *Vorl. (17)* S. 6.
[2]) v. DANTSCHER *Vorl. (17)* S. 9f.
[3]) v. DANTSCHER *Vorl. (17)* S. 12.
[4]) v. DANTSCHER *Vorl. (17)* S. 11.
[5]) v. DANTSCHER *Vorl. (17)* S. 17f.

Das Resultat unserer Betrachtungen können wir dahin zusammenfassen: Die reelle Zahl ist definiert als begriffliche Kombination einiger in der Lehre der Rationalzahlen entwickelten Begriffe. Ebenso sind die Operationen an reellen Zahlen mit Hilfe solcher Begriffe definiert, wie sie bereits im Kalkül der rationalen Zahlen Verwendung gefunden haben.

Kurz gefaßt: Das Gebiet der reellen Zahl ruht in allen seinen Bestandteilen auf dem Bereich der rationalen Zahlen.

Dieses Resultat wird auch nicht sich ändern, wenn wir die Voraussetzungen untersuchen, die der Theorie DEDEKIND'S zugrunde liegen. Wir geben hier — der großen Bekanntheit dieser Methode halber — nur noch einmal die Voraussetzungen wieder, die aus dem Gebiet der rationalen Zahlen entnommen sind, und dann noch einmal die bekannte Schnittdefinition.

Die außerordentlich große Verbreitung, deren sich die DEDEKIND'sche Theorie erfreut, scheint uns nicht zum wenigsten dadurch hervorgerufen worden zu sein, daß man bei ihr nur einer ungemein kleinen Basis von Begriffen bedarf, um die reelle Zahl aus dem Bereiche der Rationalzahlen abzuleiten. Während nämlich, wie wir eben gesehen haben, die arithmetischen Theorieen von CANTOR und WEIERSTRASS den ganzen Apparat der Arithmetik der Rationalzahlen in Bewegung setzen mußten, um nur den Begriff der reellen Zahl zu finden, wird die Einführung der Operationen im rationalen Bereich erst dann bei DEDEKIND notwendig, wenn es sich darum handelt, mit den neu definierten Zahlen zu rechnen. Es birgt demnach diese Methode neben der gerin eren Menge von Voraussetzungen bei der Ableitung des Begriffes der reellen Zahl eine schärfere Analogiemöglichkeit in sich: Man benötigt bei der Definition der reellen Zahl nur der Reihe der rationalen Zahlen (in ihrer Größenordnung) und erst bei der Theorie der Operationen mit reellen Zahlen der rationalen Arithmetik.

Wir untersuchen also die DEDEKIND'sche Schnittdefinition daraufhin, was für Voraussetzungen in ihr enthalten sind.

Sie lautet:

„Zwei Mengen von Rationalzahlen bestimmen dann einen Schnitt in der Gesamtmenge der rationalen Zahlen, wenn

I. Jede Menge mindestens eine Rationalzahl enthält.

II. Jede Rationalzahl einer und nur einer der beiden Mengen angehört.

III. Jedes Element der ersten Menge kleiner ist, als jedes Element der zweiten Menge.“[1])

Das ganze Begriffsmaterial, das hier verwendet wird, ist also in der Tat in zwei Stücken gegeben: „Menge von Rationalzahlen“ (insbesondere der Spezialfall „jede Rationalzahl“; ferner „Element einer Menge von rationalen Zahlen“) und die zwischen zwei verschiedenen Rationalzahlen immer obwaltende Beziehung „kleiner als“.

Es zeigt sich hierbei eine weitere Eigenschaft der DEDEKIND'schen Definition: neben der geringen Menge ihrer Voraussetzungen steht ihre große Allgemeinheit, oder vielmehr ihre ungemein leichte Erweiterungsfähigkeit auf beliebige Mengen:

„Zwei Teilmengen einer Menge bestimmen einen „Schnitt“ in dieser Menge, wenn

I. Jede Teilmenge mindestens ein Element enthält.

II. Jedes Element der Menge einer und nur einer Teilmenge angehört.

III. Jedes Element der einen Teilmenge zu jedem Element der anderen Teilmenge in ein und derselben Beziehung steht.“[2])

---

[1]) Unsere (im Anschluß an KNOPP *Funktionentheorie (59)* S. 10) gegebene Definition weicht von der DEDEKIND'schen (*Stetigkeit (18)* S. 12; ebenso KOWALEWSKI *Grundzüge (65)* S. 4 und VOSS *Wesen (11)* S. 44) darin ab, daß der Fall einer unvollkommenen oder einer einseitigen Einteilung ausdrücklich ausgeschlossen wird. — Das Wort „Menge“ anstatt „System“ oder „Klasse“ haben wir mit Rücksicht auf die später von uns vollzogene Verallgemeinerung gewählt.

[2]) Wieweit diese Definition sich zu einer allgemeinen Stetigkeitsdefinition für Mengen ausbauen läßt, d. h. welche Begriffe noch

Zugleich ersieht man aus dieser allgemeinen Formulierung, daß noch weitere Untersuchungen dann angestellt werden müssen, wenn die Schnittdefinition nicht einfach ein duales Klassifikationsprinzip bedeuten soll. Denn jede beliebige Einteilung einer Menge nach dem Schema, daß in die eine Teilmenge irgendwie bestimmte (nur nicht alle) Elemente getan werden, in die andere Teilmenge aber „alle übrigen" Elemente der Menge wandern, stellt dann einen „Schnitt" dar. Die Bedingung III wird nämlich immer durch die Beziehung erfüllt werden — wenn a Element der ersten Teilmenge b dagegen Element der zweiten Teilmenge ist — „a ist nicht-identisch mit b" (wobei unter identisch das Übereinstimmen in jeder Hinsicht verstanden wird; und a und b sind ja verschieden hinsichtlich ihrer Zugehörigkeit zu Teilmengen).

Von Wichtigkeit würde es insbesondere sein, festzustellen, was es heißt, etwas „als Schnitt" zu definieren, d. h. es durch einen Schnitt (als Mengenzerlegung nach den Bedingungen I.—III.) als völlig bestimmt in seiner begrifflichen Zusammensetzung anzusehen. Es gilt dann unter allen Schnitten die auszusondern, die mehr als eine bloße Mengenzerlegung aussagen, und deren Eigenschaften darzustellen. Denn wäre jede Zerlegung in zwei Teilmengen als brauchbare Definition zulässig, so könnte man etwa auf den Einfall kommen, einen neuen Begriff X durch den Schnitt in der Menge aller Gegenständë zu definieren, der durch die Teilmengen „alle Schreibmaschinen" und „alle übrigen Gegenstände" hervorgebracht würde. Diese Definition ist nämlich keine wirkliche Definition. Es ist z. B. aus ihr nicht abzulesen, ob X ein „Gegenstand" ist oder nicht; oder, ob X zur ersten Teilmenge gehört oder nicht, kurz, dieses „X" ist mindestens in diesen beiden Punkten nicht endgültig bestimmt; es ist durch die duale Zerspaltung nicht wissenschaftlich festgelegt.

---

hinzugefügt werden müssen, darüber vgl. HAUSDORFF *Grundzüge (38)* S. 90ff. Diese mengentheoretischen Überlegungen gehen selbstredend in anderer Richtung, als die von uns weiter unten angestellten begrifflichen Erwägungen.

matik betrachten, so finden wir in der Tat die positiven Brüche (und namentlich die mit dem Zähler 1) bei fast allen Kulturvölkern außerordentlich früh. Für unsere auf die Antike sich stützende Kultur kommt noch die Proportionenlehre EUKLID'S als Bindemittel zwischen Brüchen und geometrischen Größen hinzu, die eine Veranschaulichung der Rationalzahlen ohne weiteres möglich machte.

Mehr Schwierigkeiten machten schon die „negativen Größen". Man empfand es als sinnwidrig, daß etwas, was „groß" sein sollte, doch „weniger als Nichts" wäre. Durch Einführung „entgegengesetzter Größen" glaubte man diese Schwierigkeit zu überwinden.[1]) Wenn man aber scharf zusieht, so ist, wie schon GAUSS bemerkt, im Grunde genommen durch das „entgegengesetzt" gar nichts über die Größe selbst und deren Großsein gesagt, sondern nur über Relationen zwischen Größen — so daß der obige Einwand immer noch, was die Größen selber anlangt, zu Recht bestehen bleibt. „Entgegengesetzte Größen" sind eigentlich nur solche, die durch entgegengesetzte Maßzahlen gemessen werden. Bevor man also daran gehen kann, festzustellen, ob derartige Größen überhaupt existieren, muß man erst einmal sehen, wie die ihnen entsprechenden Maßzahlen ihrem Begriffe nach zusammengesetzt sind. Und diesem Problem wenden wir unsere Aufmerksamkeit zu.

Bei der Durchmusterung der bisher gegebenen Versuche, die Merkmale der rationalen und insbesondere der negativen Zahlen zu bestimmen, ist uns nur ein einziger begegnet, der nicht die positiven und negativen Brüche als begrifflich unterscheidbar von den positiven Zahlen ansieht. Dieser Versuch ist der von NATORP unternommene.[2])

NATORP's Deduktion geht folgendermaßen: „Sei eine Relation Q zu P gegeben, wo Q das Grundglied, P das Gegenglied sei, so kann in einer neuen Relation Q Grundglied werden, welches dann ein ferneres Gegenglied, etwa R, fordert

[1]) GAUSS *Werke (32)* II S. 176.

[2]) NATORP *Grundlagen (73)*. — Wir haben diesen Versuch seiner Einzigartigkeit willen hier aufgenommen, obwohl wir sonst ausschließlich Mathematiker zu Wort kommen lassen.

es kann andererseits in einer neuen Relation P als Gegenglied auftreten, welches dann ein ferneres Glied als Grundglied fordert, etwa O; und das nicht, indem die ganze Reihe dieser Glieder (wie in unserer Bezeichnung das Alphabet) schon als gegeben angenommen wird, sondern indem sämtliche Glieder durch die immer gleichartig sich wiederholende Beziehung erst gesetzt werden. So ergibt sich eine beiderseits offene Gliederreihe, etwa darzustellen durch diese Reihe:

. . . ⊓⊓⊓⊓ . . .“[1])

Hier fehlt zunächst der Nachweis — und wir haben ihn auch sonst in dem Werke nicht entdecken können, daß die Forderung nach der Existenz eines Grund- oder Gegengliedes in einer Relation stets befriedigt werden könne. Diese Forderung liegt aber vor; denn die betreffenden Glieder werden „dargestellt“, d. h. ihre Existenz wird sinnlich wahrnehmbar gemacht. Auch diese Darstellung selber läßt zu wünschen übrig, denn der Strich, der das jedesmalige Glied einer Relation vertritt, läßt in seiner Einförmigkeit den Schluß naheliegend erscheinen, daß die Glieder alle ohne weiteres in ihrer begrifflichen Struktur als gleich anzusehen seien — ein Schluß, der zwar durch die späteren Entwicklungen bei Natorp bestätigt wird, aber durch nichts gerechtfertigt erscheint. Denn warum sollten nicht auch ganz verschiedenartige Elemente immer wieder durch dieselbe Relation zu immer wieder verschiedenen Gliedern als Grund- oder Gegengliedern führen?

Solange also zum mindesten nicht nachgewiesen ist, daß die Existenz eines Gliedes und die Forderung, durch eine gegebene Relation zu diesem gegebenen Gliede ein neues zu „setzen“, auch die Existenz dieses neuen Gliedes nach sich zieht, ist die ganze Reihe in Frage gestellt. Der Nachweis müßte natürlich unabhängig von jeder Zahlbeziehung geführt werden.[2])

Aber um nunmehr auf unsere Behauptung zurückzukommen; — Natorp gibt an: „Jedes Glied der Reihe kann

---

[1]) Natorp *Grundlagen (73)* S. 101.

[2]) Wir sehen nicht, wie dieser Beweis auf den Grundlagen von Natorp geführt werden könne. Dabei berufen wir uns auf

im bloßen Stellverhältnis als erstes gesetzt, und dann das ihm folgende als zweites, das diesem folgende als drittes usw. gezählt werden."[1])

Hier fehlt nun wieder die Angabe, was unter „folgen" verstanden wird: Man könnte sich ja auch vorstellen, daß ein dauerndes Springen von einer Seite des Ausgangspunktes auf die andere gemeint sei.[2])

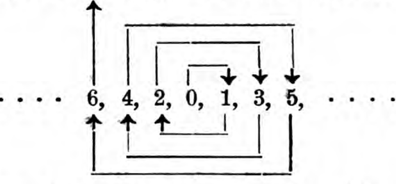
Es wird aber wohl richtiger sein, hinein zu interpretieren, daß das „folgende Glied" das Gegenglied der durch das zuletzt gesetzte Glied als Grundglied ange-

---

NATORP's eigene Worte, die er bei der Kritik von FREGE *Grundlagen (29)* verwendet: „Sehr treffend ist . . . (bei FREGE) die Widerlegung . . von J. S. MILL . . .; nicht minder treffend die Ablehnung der unklaren Begründung auf „Anschauung"; . . . die Zurückweisung aber auch . . . eines Formalismus, der „so tut, als ob" Forderung schon Erfüllung wäre, indem er z. B. fordert, daß Subtraktion, Division, Radizierung immer ausführbar sei, und damit dann genug getan zu haben glaubt" (NATORP *Grundlagen (73)* S. 112f.). Wir fragen nun, ob es nicht genau so „formalistisch" gedacht ist, wenn das Gegenglied einer Relation, bloß weil es und die Relation vorhanden ist, ein Grundglied fordert ?!— In der Tat wird durch diese Forderung die negative Zahl bereits implizite gefordert, denn die Forderung eines Grundgliedes bedeutet nichts anderes als die Forderung, mit negativen Zahlen arbeiten zu können. — Daraus, daß dieser Punkt übersehen ist, entstehen die später gekennzeichneten Schwierigkeiten.

[1]) NATORP *Grundl. (73)* S. 126. — Will man nun aber ein Glied als erstes „setzen", so müßte man doch eigentlich wissen, was es heißt, „erstes sein". Wenn also nicht das „setzen" soviel bedeuten soll, wie „bezeichnen" oder „Namen geben", so wird sicher schon bei dem Akt des „als Erstes, Zweites usw. . . . setzen", die ganze (natürliche) Zahlreihe als bekannt vorausgesetzt, ein Punkt, der entschieden noch einige Unstimmigkeit zeigt.

[2]) Hierbei würde man über die positiven ganzen Zahlen nicht hinauskommen, wie durch folgendes Bild veranschaulicht wird:



Außerdem würden die späteren Erörterungen über die Operationen sehr unübersichtlich werden.

brochenen Relation sein soll. Die Zählung schreitet also ausschließlich in demselben geometrischen Sinne nach einer Seite hin fort. Da scheint es fast selbstverständlich, daß der Blick und die Aufmerksamkeit des Zählenden auch einmal sich auf die andere Seite des Ausgangspunktes richtet. Das geschieht nun bei NATORP insofern, als man ja den Ausgangspunkt auch beliebig nach dieser Seite hin verschieben kann.

In diesem Sinne werden nun tatsächlich die negativen Zahlen gedeutet durch folgende Erklärung der Subtraktion: „2 ist, vom Ausgangspunkt 1 gerechnet, 1, d. h. 2 verhält sich zu 1, als neuem Ausgangspunkt, wie 1 zum ursprünglichen Ausgangspunkt, also zur 0 der ursprünglichen Zählung:

$$2 - 1 = 1 - 0.\text{“}$$ [1]

Diese Betrachtung ist durchführbar, solange man sich auf dem Gebiet der benannten Zahlen bewegt.[2] Wie aber will man die Subtraktion für allgemeine Zahlen erklären? Der Subtraktionsansatz, der nach der eben gegebenen Erklärung zu machen wäre, müßte ja folgendermaßen lauten:

$$a - b = x - 0.$$

In Worten: a verhält sich zu b als neuem Ausgangspunkt, wie x zum ursprünglichen Ausgangspunkt 0. Und gerade hierin liegt ja die Schwierigkeit: wenn a nicht im Sinn der bisherigen Zählung irgendwann auf b „folgt“, doch eine solche Zählung zu finden, die es ermöglicht, b als Ausgangspunkt zu nehmen, und doch ein im Sinn der neuen Zählung auf b „folgendes“ a zu erreichen. Das ist der Sinn der negativen Zahlen, in der Sprache NATORP'S gesprochen: mit ihrer Hilfe „rückwärts“ zählen zu können. Und diese Schwierigkeit hat NATORP nicht gelöst, nach seiner ganzen Auffassung der natürlichen Zahlen und der Grundreihe auch gar nicht lösen können.

---

[1]) NATORP *Grundl. (73)* S. 136f. In ähnlicher Weise sollen sich sämtliche arithmetischen Gleichungen in viergliedrige Proportionen umwandeln lassen.

[2]) Auch die von NATORP aus der Grundreihe abgeleiteten Zahlen sind im Grunde nur benannte Zahlen, da sie Relationen (oder deren Glieder) als zählende Einheit haben.

Er versucht hier nämlich, wie man sagen kann, KRONECKER's Programm der Verbannung aller anderen als der natürlichen Zahlen durchzuführen. Allerdings mit der bedeutsamen Variante, daß er an Stelle der natürlichen Zahlen die beiderseits offene Grundreihe setzt[1]); daß er ferner die Möglichkeit voraussetzt, solche verschieden gezählten Reihen miteinander zu vergleichen. Daher wird er der obenerwähnten Schwierigkeit nicht Herr.

Die meisten der uns bekannten Versuche gehen aber darauf zurück, die negative Zahl auf die Subtraktion zu stützen, und ebenso werden die Brüche sehr oft auf die Division zurückgeführt.

Bezeichnen nämlich a und b etwa zwei positive Zahlen — von denen man weiß, was es heißt, daß eine von ihnen „größer" sein soll als die andere, — so wird $(a - b)$ bekanntlich nur dann wieder eine Zahl (= positive Zahl), wenn a größer ist als b. Man kann dann die Formel bilden $(a - b) + b = a$. Nun sagt man, daß diese Formel auch dann gelten solle, wenn $(a - b)$ keine positive Zahl sei. Man betrachtet in diesem Falle die Formel $(a - b) + b = a$ als Definition der Zahl $(a - b)$.[2])

Es ist ein bereits von GRASSMANN erhobener Einwand, daß man diese Definition nicht ohne weiteres billigen könne. Denn was es bedeutet, zwei Zeichen durch das Zeichen + additiv zu verbinden, wisse man zunächst nur dann, wenn es sich um Zeichen handele, für die die Addition ausdrücklich erklärt sei. GRASSMANN hat mit diesem Einwande insofern unbestereitbar Recht, als es sicher zunächst keinen Sinn hat, von der Summe $(a - b) + b$ zu reden, solange

---

[1]) Über eine unter Umständen erfolgte Voraussetzung der natürlichen Zahlen selber; s. S. 100 Anm. 1 d. A.

[2]) STOLZ *Arithmetik* (103) und STOLZ-GMEINER *Arithmetik (104)* befo gen diese Art der Definition in der analytischen Theorie der rationalen Zahlen. In der synthetischen Theorie der rationalen Zahlen dagegen wird eine neue Einheit I und eine Reihe Untereinheiten zur bisherigen Einheit hinzu dekretiert. — NETTO *Algebra (74)* faßt die im Text gegebene Gleichung als Definition der Subtraktion auf; das ist von der im Text angegebenen Funktion der Gleichung natürlich scharf zu unterscheiden.

nicht entweder die Glieder der Summe, also $(a - b)$ und b beides positive Zahlen sind, für die allein bisher das Wort Summe Sinn hatte, oder eben diese Summe irgendwie eindeutig bestimmt wird.

Diese Alternative kann man auch so wiedergeben: Der erhobene Einwand besteht zu Recht, solange die Formel $(a - b) + b = a$ den Begriff der negativen Zahl selber ausreichend erklären soll, er wird unzutreffend, solange man in besagter Formel die Erklärung für die Addition von $(a - b)$ mit b erblickt. D. h. sobald man die Formel als eine aus der Theorie der Operationen auffaßt, ist sie zweifellos geeignet, den ihr aufgegebenen Zweck zu erfüllen. Dagegen versagt sie in der eigentlichen Zahlenlehre.

Ganz Analoges läßt sich nun auch über die Einführung der gebrochenen Zahlen mit Hilfe der (positiven und negativen) ganzen Zahlen an Hand der Formel $\frac{a}{b} \cdot b = a$ sagen. Wir führen aber diese Erörterung, da sie fast wörtlich der eben geführten gleichen würde, nicht weiter aus.

Wir sehen also, daß die Zurückführung der rationalen Zahl auf die als bekannt vorausgesetzte natürliche Zahl mit Hilfe der angegebenen Formeln $(a - b) + b = a$ und $\frac{a}{b} \cdot b = a$ etwas Unbefriedigendes hat, insofern hier nicht die rationalen Zahlen selber, sondern nur das Rechnen mit ihnen begründet wird.[1])

Dieser Sachlage läßt sich aber entgehen, wenn man die Brüche und negativen Zahlen ähnlich behandelt, wie seinerzeit die imaginären. Es liegt auch in der Tat eine ganz ähnliche Sachlage vor.[2])

---

[1]) Gänzlich unzureichend erscheint uns die Begründung dieses Teiles bei WEBER-WELLSTEIN *Enzyklopädie (112)* S. 31f. Hier wird die 0, das leere System, einfach als Lösung der Aufgabe $b + x = a$ für $b = a$ hingestellt. Die negativen Zahlen sind die noch einmal gedachten natürlichen Zahlen (ohne Null). — Dagegen geschieht die Einführung der Brüche durch Zahlenpaare (S. 51f.).

[2]) HANKEL *Theorie (36)* S. 5; vgl. DUREGE *Elemente (26)*, S. 4ff.

Nehmen wir einmal an, es seien die positiven und negativen Zahlen und daher auch Addition und Multiplikation und Subtraktion definiert, und es stehe nunmehr die Forderung der Ausführbarkeit der Division vor uns, d. h. — wenn A und B dem gegebenen Zahlenbereich entnommen sind — es werde verlangt, eine Zahl x zu finden, die die Gleichung befriedigt $x \cdot B = A$. Im Gegensatz zu den bisher genannten Operationen der Addition usw., deren Resultate stets wieder eine ganze Zahl war, zeigt sich dann, daß sich die Division nicht ohne weiteres für alle Zahlen durchführen läßt.

Wir verlassen deshalb überhaupt vollkommen unser Zahlengebiet insofern, als wir ein neues Gebiet von Paaren (A/,B) ganzer Zahlen betrachten. Wir legen fest, wann zwei solche Paare (A/,B) und (A′/,B′) einander gleich heißen und wie sie im Falle der Ungleichheit miteinander verglichen werden sollen, wir definieren die Operationen der Addition, Multiplikation und Subtraktion, indem wir nachweisen (mit Hilfe der Operationen im Bereiche der ganzen Zahlen), daß das Resultat einer dieser Operationen wieder ein Paar ist. Die Formeln, die uns dazu verhelfen, führen wir hier kurz an[1]):

I. $(A/,B) \lesseqgtr (A'/,B')$, wenn $A \cdot B' \lesseqgtr A' \cdot B$ ist.[2])

II. $(A/,B) \pm (A'/,B') = (AB' \pm A'B/,BB')$

III. $(A/,B) \cdot (A'/,B') = (A \cdot A'/,B \cdot B')$

Nun läßt sich aber auch die Division der Paare so definieren, daß sie stets ausführbar ist. Es kann nämlich gesetzt werden:

IV. $(A/,B) : (A'/,B') = (A \cdot B'/,A' \cdot B)$ [3]).

---

[1]) Ausführlicher wird diese Art der Einführung behandelt bei DINI-LÜROTH-SCHEPP *Grundlagen (25)* für negative, gebrochene und imaginäre Zahlen.

[2]) Hierbei ist vorzuschreiben, daß negative Zahlen nur als erste Zahlen eines Paares auftreten dürfen (also als A oder A′, nicht als B oder B′).

[3]) Sollte beim zweiten Paare A′ negativ $= -A_1$ sein, so verfährt man folgendermaßen. Es ist

$$(A'/,B') = (-1/,1) \cdot (A_1/,B')$$

also

$$\begin{aligned} &(A/,B) : (A'/B') \\ &= (A/,B) : (A_1/,B') \cdot (-1/,1) \\ &= (-AB'/,A_1B). \end{aligned}$$

Da nun die Paare (A/,1) nur von A selber abhängig sind, so läßt sich leicht erkennen, daß sie — unter Berücksichtigung der oben angegebenen Regeln als Funktionalgleichungen — nichts anderes als eine andere Schreibart für die Zahl A selber sind. Wir können daher in allen Rechnungen, die wir mit Paaren anstellen, (A/,1) = A setzen, und so werden sich alle Rechnungen mit ganzen Zahlen als soche mit Paaren (A/,1) schreiben lassen. Unter Berücksichtigung dieser Umstände ergibt sich dann das eigenartige Resultat:

$$A : B = (A/,1) : (B/,1) = (A/,B).$$

Diese Gleichung hat natürlich nur dann Sinn, wenn $A = Q \cdot B$ ist, da ja sonst A : B nicht definiert ist. Beschränkt man sich aber darauf, sie für die Paare (A/1) und (B/1) zu entwickeln, so hat sie stets Sinn, wie auch A und B sein mögen.

Wir haben also hier den „Bruch" (A/,B), den wir dann auch $\frac{A}{B}$ schreiben, als eine Kombination von ganzen Zahlen erkannt, so daß die begriffliche Unterlage für den ersteren ausschließlich in der ganzen Zahl zu suchen ist.

Genau Analoges läßt sich für die negativen Zahlen durchführen. Setzt man hier a und b als positive Zahlen an, so lassen sich für Paare solcher Zahlen (a ∸ b) die folgenden Gesetze entwickeln[1]):

I. $(a \div b) \lesseqgtr (a' \div b')$, wenn $a + b' \lesseqgtr a' + b$ ist.

II. $(a \div b) + (a' \div b') = (a + a' \div b + b')$

III. $(a \div b) \cdot (a' \div b') = ((a \cdot a' + b \cdot b') \div (a \cdot b' + a' \cdot b))$.

Da die Division nicht in der gewünschten Weise wieder als Paar $(x \div y)$ darstellbar ist, wird es zweckmäßig sein, diese Darstellung der negativen Zahlen entweder gleich hinter der Addition, spätestens hinter der Multiplikation mit ganzen positiven Zahlen einzufügen. Die Subtraktion läßt sich nun sehr leicht entwickeln:

---

[1]) Ansätze in dieser Richtung finden sich namentlich bei Reichel *Grundlagen (85)*, der (in I S. 15ff.) eine Rechnung mit nicht-positiven Differenzen zu begründen versucht; auch bei der eigenartigen Verquickung der Theorie der Operationen und der Zahlenlehre von Burkhardt *Analysis (11)* S. 16ff.

IV. $(a \div b) - (a' \div b') = (a + b' \div b + a')$.
Wie beim Bruch (A/,1), so läßt sich auch bei den Paaren von der Form $(a + b \div b)$ ihre ausschließliche Abhängigkeit von a nachweisen, sowie, daß sie nichts anderes als die Zahl a selber darstellen. Daran schließen sich dann dieselben Überlegungen, wie wir sie oben für die Paare (A/,B) geführt haben.

So gelingt es, auf die Grundbegriffe der natürlichen (positiven ganzen) Zahlen und deren Operatioen den Begriff der negativen Zahl und das Rechnen mit solchen, auf die ganzen Zahlen die Brüche und deren Arithmetik zurückzuführen.[1]) Sonach ruht das ganze Gebäude der positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen, und dadurch wieder der gesamte Bereich der reellen und endlich der der komplexen Zahlen auf der Grundlage der natürlichen Zahlen.[2])

Noch aber sind wir mit dem bisher Erreichten nicht am Ende dessen angelangt, womit sich die mathematische Ana-

---

[1]) SCHUBERT *Grundlagen (98)* definiert zunächst die Zahl als „Ergebnis des Zählens", d. i. „der Zuordnung von Dingen zu Dingen". Demgemäß kann, wenn a kleiner als b ist, (a — b) keine Zahl sein. „Nun befolgt aber die Arithmetik ein Prinzip, das man das Prinzip der Permanenz oder das der Ausnahmslosigkeit nennt." Es besteht — nach SCHUBERT — in den vier Stücken:

1. Jede Zahlverknüpfung, die keine Zahl ist, nach denselben Regeln zu behandeln, als stellte sie eine Zahl dar.

2. „Eine solche Verknüpfung als Zahl im weiteren Sinne des Wortes zu definieren und dadurch den Begriff der Zahl zu erweitern."

3. Zu bestimmen, daß die alten Rechenregeln auch für die neuen Zeichen gelten.

4. Den Gebrauch der Größenbeziehungen im neuen Bereich zu definieren.

Dagegen scheint uns folgendes einwendbar: Da wir von der Arithmetik noch gar nichts wissen, ist such nicht sicher, ob nicht das Prinzip zu Widersprüchen führt. Seine Verwendung als Beweisprinzip ist daher unzulässig, solange der Nachweis der Widerspruchslosigkeit fehlt.

[2]) Wir möchten hier nicht verfehlen, wenigstens andeutungsweise auf die WEIERSTRASS'sche Art der Einführung der Brüche und negativen Zahlen hinzuweisen. Sie liegt uns in der Fassung vor, die ihr BIERMANN (*Theorie (5)* S. 9ff.) gegeben hat. — Er führt die gebrochenen Zahlen $\frac{a}{n}$ als Multipla von a und einem ge-

lyse des Zahlbegriffes befaßt. Vielmehr beginnt nun die Arbeit, die ungefähr in der Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert die Mathematiker beschäftigt hat, die Grundlegung der Arithmetik der natürlichen Zahlen.

C. Die letzten Voraussetzungen.

§. 16. Mengentheoretischer Unterbau.

Dem prüfenden Blicke, der die mathematische Literatur der letzten Dezennien überschaut, soweit sie sich mit grundlegender systematischer Arbeit befaßt, kann es nicht entgehen, daß auf das Zeitalter des Kampfes um die Nicht-Euklidische Geometrie[1]), um die Sicherung der Imaginaritäten[2]), (negative, rationale, reelle, komplexe Zahlen) eine neue Epoche für die philosophische Mathematik gefolgt ist. Sie gewinnt für unsere Frage (mathematische Analyse des Zahlbegriffes) besonderen Reiz. Denn eines ihrer wichtigsten Probleme ist: der uns am meisten gewohnten und durch Gewohnheit selbstverständlichen Arithmetik, der Lehre von den natürlichen Zahlen einen Ausbau zu geben, der geeignet ist, das ganze Gebäude der Mathematik zu tragen.

Natürlich gehen bei dieser Abgrenzung der Zeitalter die historischen Grenzen ineinander; es läßt sich nicht Tag und Stunde angeben, da das eine aufgehört und das andere

---

wissen Teile ε_n der Einheit 1 ein. Das ε_n soll durch die Gleichung definiert werden $n.\ \varepsilon_n = 1$. — Ebenso wird für die negativen Zahlen eine Einheit e' geschaffen, die durch $a + e + e' = a$ definiert werden soll. — Gegen beide Definitionen ist indessen der oben (S. 102 f d. A.) erörterte GRASSMANN'sche Einwand schlagend anzuwenden.

[1]) Als Großmeister in dieser Hinsicht können FELIX KLEIN und SOPHUS LIE gelten. Beide haben unter Hintanstellung jedes Gesichtspunktes, den man als „philosophisch" bezeichnen könnte, für die mathematische Systematik Unschätzbares geleistet. Sie deckten durch das Studium der Maßbestimmungen der projektivischen Geometrie einerseits (vgl. etwa KLEIN *N.-E. Geom. (56)*), der Gruppentheorie andererseits mathematische Beziehungen auf, die für die Zusammengehörigkeit namentlich geometrischer Gebiete von großer Wichtigkeit waren (KLEIN, *Betrachtungen (58)*).

[2]) Einen beträchtlichen Teil der hierhergehörigen Bemühungen haben wir schon in den vorangehenden Paragraphen 10ff. erwähnt.

begonnen hat[1]), könnte man doch selbst dem Satz nicht unbedingt widersprechen, daß die angegebene Frage zu jeder Zeit mathematischen Denkens eine Rolle gespielt habe.

Und dennoch ist unsere Einteilung sicher nicht unberechtigt. Wohl war die Frage nach dem Begriff der natürlichen Zahl von altersher den Mathematikern und Philosophen bekannt und ist vielfach behandelt und „gelöst" worden; aber das ist es auch nicht, was wir als Kennzeichen der letzten mathematischen Jahrzehnte in ihrem Streben nach sicherer Grundlegung der Arithmetik ansehen. Das besteht vielmehr darin, daß man die Frage nach dem begrifflichen Aufbau der natürlichen Zahl als eine quälende, drückende empfand, als eine solche, zu der man die Antwort nicht ohne weiteres bereit hatte, und die doch von unendlicher Wichtigkeit war.

Es ist eine bekannte und schon oft hervorgehobene Tatsache, daß durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie die Sicherheit dieser Wissenschaft auf die Festigkeit der Arithmetik zurückgeführt worden ist.[2])

Andererseits gipfelte, wie wir gesehen haben, die analytische Arbeit in den Grundlagen der Analysis, Algebra und Arithmetik in Sätzen, die alle anderen Zahlklassen (die transfiniten vielleicht ausgenommen) ihrem Begriff nach aufs engste mit den natürlichen Zahlen zusammenschlossen. Und wenn die von den natürlichen Zahlen verschiedenen Zahlen auch nicht geradezu nach dem Wunsche KRONECKER'S ersetzt wurden, so wurde doch in jeder derartigen Grund-

---

[1]) Wenn man überhaupt solch eine Grenze festsetzen will, so kann man am ehesten noch das Jahr 1887 nehmen, als das Jahr, in dem DEDEKIND's Schrift: *Was sind und was sollendie Zahlen ? (21)* erschien. Indessen ist FREGE's Versuch, in den *Grundlagen (29)* den allgemeinen Zahlbegriff aufzudecken, schon 1884 veröffentlicht, und noch lange, lange nach 1887 finden wir bei WEYL und BROUWER Versuche, die Analysis auf eine neue Grundlage des Irrationalen zu stellen.

[2]) Aus der zahlreichen Literatur hierüber führen wir nur je ein philosophisches und ein mathematisches an: MEINECKE *N.-E. Geom.-Kant (71)* S. 21f.; BERNSTEIN *Finitismus (3)* S. 71.

legung der Zahlenlehre die Arithmetik der natürlichen Zahlen als einwandfrei und selbstverständlich bekannt vorausgesetzt. Für ihre Sicherheit galt es also, Garantieen zu schaffen.

Es konnte sonach nicht ausbleiben, daß man bei solchen Bemühungen über die natürlichen Zahlen hinausgriff und Umfassenderes als diese aufzufinden versuchte.

Sucht man diese Bestrebungen in einige größere Gruppen einzuteilen, um sich einen leichteren Überblick zu verschaffen, so ergeben sich im großen und ganzen drei verschiedene Wege, die zur Lösung eingeschlagen wurden.

Der eine ist der, namentlich am Anfang unseres Jahrhunderts vielfach betretene Weg, die mengentheoretischen Begriffe so zu gestalten, daß sie, vom Begriff der natürlichen Zahl unabhängig, diesen allererst zu definieren vermöchten. Ein zweiter Versuch geht in ausschließlich logischen Betrachtungen auf und sucht durch lediglich begriffliche Erörterungen aus allgemeinen Gegenstandskategorien die natürliche Zahl und deren Operationen abzuleiten. Der dritte erst in letzter Zeit gebahnte Pfad geht auf das Wesen der arithmetischen Grundbeziehungen und die für diese notwendigen Voraussetzungen zurück; zu seiner Kennzeichnung dient das Wort Axiomatik.

Es erscheint beinahe überflüssig, auch hier zu bemerken, daß diese Aufzählung die historische Aufeinanderfolge nicht streng wiedergibt, ja daß eine solche überhaupt schwerlich bestimmt werden kann Ist doch selbst eine systematische Klassifizierung, wie wir sie versucht haben, sehr mit Vorsicht aufzunehmen, da selbstverständlich die verschiedenen Standpunkte viele vermittelnde Zwischenstufen haben, die ineinander übergreifen.

Eine Rückführung der natürlichen Zahl auf mengentheoretische Begriffe soll uns zunächst beschäftigen. Hier bieten sich zwei Theorieen dar, die man nach den in ihnen verwendeten Grundbegriffen etwa die Theorie der Abschnitte wohlgeordneter Mengen, im Gegensatz zur Theorie der Ketten nennen kann. Letztere, die sich vor der erstgenannten durch größere Handlichkeit und Einfachheit ihrer Voraussetzungen auszeichnet, stammt be-

kanntlich von DEDEKIND. Wir werden uns mit beiden auseinanderzusetzen haben.

Eine Reproduktion der Methoden indessen, wie wir sie bisher bei fast allen Erörterungen gegeben haben, nehmen wie hier nicht vor.[1]) Aus zwei Gründen. Erstens scheint es uns unmöglich, etwa die DEDEKIND'sche Darstellung noch an Knappheit zu übertreffen — und sie ist schon diejenige von beiden, die sich noch am kürzesten fassen läßt. Und selbst dann, wenn nur die grundlegenden Begriffe Punkt für Punkt auf ihre Voraussetzungen hin geprüft werden sollten, würde das für unsere Untersuchung hier viel zu weitläufig werden. Zum zweiten aber scheint es uns, als müsse in den gesamten Entwicklungen der Mengenlehre — und also auch in den beiden oben genannten Theorieen aus ihr — der Begriff der endlichen natürlichen Zahlen als bekannt vorausgesetzt werden, nämlich bei dem Begriff der Äquivalenz. Verhält sich das tatsächlich so, so können wir uns mit der Analyse dieses grundlegenden Begriffes begnügen und daraus unsere Folgerungen ziehen.

Dazu ist noch zu bemerken: Wir sehen bei dieser Besprechung (allerdings auch nur hier) ausdrücklich von allem und jedem ab, was wie eine Appellation an Instanzen jenseits der Mengenlehre aussehen könnte. Denn um die Zulässigkeit dieser Instanzen handelt es sich gerade, und wenn wir sie als gültig voraussetzen, so brauchten wir gar nicht in die Untersuchung einzutreten, da dann das Urteil schon

---

[1]) Es sei hier auf HESSENBERG *Grundbegriffe (40)* verwiesen. — Die philosophische Stellung HESSENBERG's ist zwar ungewöhnlich und kann vielleicht am besten durch „zuversichtliche Sorglosigkeit" (bei peinlicher Genauigkeit der mathematischen Ausarbeitung) bezeichnet werden. „Wer auf Konsequenz und Geschlossenheit der Darstellung Gewicht legt, wird nicht damit einverstanden sein, daß die endlichen Zahlen zunächst als etwas Bekanntes angenommen werden", und die Theorie der unendlichen Mengen auf sie gestützt wird, während dann wieder eine mengentheoretische Entwicklung der endlichen Zahlen in den letzten Teilen mit Hilfe der unendlichen Mengen gelehrt w rd. — In der Tat, man kann (!) daran Anstoß nehmen!

im voraus gesprochen ist. Die Bündigkeit unserer Schlüsse würde dann im entscheidenden Augenblick nicht ohne Grund verworfen werden können. Wir bekümmern uns hier auch nicht um Streitfragen, wie etwa die Frage nach der Klarheit des Mengenbegriffes[1]), nach der Zulässigkeit des Auswahlpostulates[2]), nicht auch um den Finitismus und die bekannten Paradoxieen[3]) — alles das bleibt bei unserer jetzigen Betrachtung vollständig aus dem Spiele. Wir erheben auch nicht etwa den Vorwurf „begrifflicher Unklarheit", sondern suchen nur zu beweisen: Der Versuch, die natürlichen Zahlen auf mengentheoretische Begriffe ohne Zuhilfenahme endlicher Zahlen aufzubauen, muß scheitern, solange der Äquivalenzbegriff mit in die Untersuchung einbezogen wird.

Die Richtigkeit dieser Behauptung tritt am deutlichsten bei der Fassung hervor, welche HAUSDORFF dem fraglichen Begriffe gegeben hat.

„Aus zwei nichtverschwindenden Mengen können wir geordnete Paare (a, b) bilden, deren erstes Element a ein Element von A, deren zweites Element b ein Element von B ist ... Wir betrachten eine Menge P solcher Paare und zwar von solcher Beschaffenheit, daß jedes Element a von A in einem und nur einem Paar p von P als erstes Element auftritt. Jedes Element a bestimmt auf diese Weise ein und nur ein Element b, nämlich dasjenige, mit dem es in einem Paare p = (a, b) verbunden auftritt; dieses ... Element bezeichnen wir mit b = f (a), und sagen, daß hiermit in A ... eine eindeutige Funktion von a definiert sei ... Ist die Menge P aber so beschaffen, daß auch jedes Element b in genau einem Paare als zweites Element auftritt, so bestimmt auch b ein einziges mit ihm verbundenes Element a = φ (b) und wir haben eine zweite in B definierte eindeutige Funktion ... Solche Funktionen werden als umkehrbar eindeutig bezeichnet. ... Wir nennen zwei Mengen, zwischen

[1]) Vgl. über diese und ähnliche Probleme ZIEHEN *Logik-Mengenlehre (117).*

[2]) S. HESSENBERG *Grundbegriffe (40)* § 137.

[3]) BERNSTEIN *Finitismus (3).*

denen eine solche umkehrbar eindeutige Beziehung ihrer Elemente möglich ist, äquivalent, in Zeichen $A \sim B$ oder $B \sim A$."[1])

Und ganz analog sagt HESSENBERG: „Zwei Mengen heißen äquivalent oder von gleicher Mächtigkeit, wenn die Dinge der einen denen der andern umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können."[2])

Es wird also ganz offensichtlich von zwei Mengen und bei HAUSDORFF obendrein noch von Paaren mit einem ersten und einem zweiten Element gesprochen. Wir wollen alsbald erörtern, was das bedeutet.

Zunächst aber wenden wir uns noch einmal zu DEDEKIND. Bei ihm tritt an die Stelle der Äquivalenz die „Elementengleichheit" (Identität?) verschiedener Mengen. Der Gebrauch des Zeichens „=" bei „Systemen" (DEDEKIND's Ausdruck für Mengen) wird, wie folgt, erörtert: „Das System S ist . . . dasselbe wie das System T, in Zeichen $S = T$, wenn jedes Element von S auch Element von T und jedes Element von T auch Element von S ist."[3]) Hier wird demnach eine Beziehung von einem ursprünglich gegebenen (oder geschaffenen oder gesetzten) Systeme zu einem anderen (ebenso gegebenen oder geschaffenen oder gesetzten) Systeme hergestellt. Auch hier wird die Zweizahl vorausgesetzt, und ohne sie wäre nicht ein Schritt denkbar.

Was besagt nun die Tatsache des Vorhandenseins der 2 in den Grundlagen der Mengenlehre, soweit sie für uns hier in Frage kommen? Kurz gesagt, soviel: Man benötigt zur Ableitung des Systemes der natürlichen Zahlen nicht nur des Mengenbegriffes. Es läßt sich aus diesem allein nicht durch logisches Schließen der gewünschte Begriff der natürlichen Zahl überhaupt entwickeln. Vielmehr müssen wir nach den Begriff des „Eins und nochmals Eins" hinzunehmen. Inwiefern und ob überhaupt man das „Eins und nochmals Eins" bereits als die Zahl 2 anerkennen will,

---

[1]) HAUSDORFF *Grundz. (38)* S. 33.
[2]) HESSENBERG *Grundb. (40)* S. 502.
[3]) DEDEKIND *Zahlen (21)* S. 2.

ist Wortfrage.[1]) Wir betrachten es als „Anderes", „Zweites", zu dessen klarer wissenschaftlicher Erfassung der Begriff „2" unumgänglich nötig ist.

Solange es also nicht gelingt, das „Andere" mengentheoretisch zu analysieren, kann keine Rede davon sein, die Mengenlehre als alleinige Stütze der Arithmetik anzusehen. Nun ist aber der verlangte Schritt, wenigstens bei dem heutigen Stande der Mengenlehre nicht möglich. Die gegenwärtig als grundlegend in dieser Disziplin anerkannten Begriffe der Teilmenge, der Äquivalenz, der Wohlordnung setzen immer „das Andere" voraus.[2]) Man kann diesem Sachverhalt folgende, sich durch ihre Konkretheit empfehlende Form geben: Man muß vor dem Studium der Mengenlehre (mindestens) bis zwei zählen können,

---

[1]) Vgl. hierüber die Anmerkung 48 von F. LINDEMANN in POINCARÉ *Wiss.-Meth. (81)*.

[2]) Daß die intuitionistische Mengenlehre BROUWER's die natürlichen (endlichen) Zahlen voraussetzt, geht aus der Definition der Menge hervor, wie sie in BROUWER *Int. Mengenl. (8)* S. 204; BROUWER *Mengenlehre (7)* S. 3 gegeben wird. — Zu den Bestrebungen BROUWER's sei uns noch eine Bemerkung gestattet: Selbst, wenn es BROUWER gelungen wäre, unabhängig vom Satz des ausgeschlossenen Dritten eine Wissenschaft aufzubauen, die er „Mengenlehre" nennt, so ist doch die Behauptung höchstwahrscheinlich übertrieben, daß das Tertium non datur „falsch" sei. Einen Beweis hierfür haben wir in seinen deutschen Schriften (außer den zitierten *Reelle Zahl (9)* und *Funktionenl. (10)* nicht finden können. Ob sich ein solcher in den von ihm angegebenen niederländisch verfaßten Schriften findet, konnten wir leider nicht feststellen. Der Rezensent von BROUWERs Dissertation „*Over de grundlagen der wiskunde*' im „*Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik*" (**38** S. 81f.) sagt nur, daß es die Ansicht BROUWER's sei, daß die Logik aus der Mathematik abstrahiert sei. Ob BROUWER dies irgendwie begründet, ist aus der Rezension nicht ersichtlich. (Meine Unkenntnis des Niederländischen ließ leider kein Quellenstudium zu.) Aber selbst dieses zugestanden und angenommen, daß die Unzulässigkeit des „tertium non datur" von BROUWER nur für die Mathematik behauptet würde, könnte man doch eine Begründung für dieses Verbot erwarten, — selbstredend eine, die nicht nur auf Opportunität Rücksicht nähme (etwa Vermeidung der Paradoxieen der Mengenlehre ohne Rücksicht auf sonstigen Verlust an Sätzen).

um nach ihrem Studium beliebig weit zählen zu können.[1])

Es bleibt daher nur übrig, zu versuchen, ob man entweder den ganzen Begriff der natürlichen Zahl, oder wenigstens den des „Eins und nochmals Eins" auf anderem Wege ableiten kann. Dieser Weg ist wiederholt beschritten worden. Vor allen Dingen ist noch heute die intensive Arbeit vieler Mathematiker darauf gerichtet, der gesamten Mathematik eine methodisch einheitliche, sie in all ihren Teilen umfassende Grundlage in der Axiomatik zu geben. Man kann heute sogar soviel sagen, daß es wesentlich von den Fortschritten und Erfolgen dieser Bestrebungen abhängen wird, wo und wie sich in Zukunft die vereinten Bemühungen der Philosophen und Mathematiker treffen und ergänzen werden.

§ 17. Zähltheorie und Formalismus.

Allein, ehe wir diesem Versuche nachgehen, haben wir noch einige andere Bestrebungen zu erwähnen, die eine Art Umgestaltung, Überleitung und Verbindung von Mengenlehre und Axiomatik darstellen.[2])

Es handelt sich hierbei zunächst um die Auffassung der natürlichen Zahl als Ergebnis der Vergleichung von „Dingen" einerseits, als Glied einer (bestimmten Gesetzen gehorchenden) Relation andererseits.

Als Beispiele der ersten Anschauung wollen wir hier die Lehren von E. SCHRÖDER und M. PASCH angeben. Sie sind in dem gekennzeichneten Punkte einander ähnlich,

---

[1]) Wie jede konkrete Sprechweise, birgt auch diese die Gefahr psychologistischer Mißdeutung in sich. Daher: unter „Zählen können" verstehen wir, „eine klare Einsicht in den Begriff der betr. Zahl haben" oder noch ein wenig pointierter: „die wissenschaftlich bedingenden Elemente des betreffenden Zahlbegriffes kennen".

[2]) Man wird nach der Einteilung auf S. 109 d. A. erwarten, daß auch der Logikkalkül hier behandelt wird. Und in der Tat, wenn irgendwo, so wäre hier der gegebene Ort zu seiner Besprechung Wir behalten uns aber die Diskussion der dahingehörigen Untersuchungen auf eine spätere Zeit vor. Eine sachliche Lücke dürfte in unseren Ausführungen schwerlich dadurch entstehen.

wenngleich sie in vielen anderen Stücken voneinander ab weichen.

In seinem „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra" gibt SCHRÖDER folgende Definition: „Die Zahl ist jedenfalls ein willkürlich von uns geschaffenes Zeichen, welches als Mittel dazu dient, um sehr mannigfaltige Zwecke zu erreichen.[1]) Diese Definition ist natürlich nicht ausreichend. (Und wohl auch kaum als abschließend ursprünglich gedacht, wiewohl sonst nur noch von speziellen Zahlklassen, nicht von dem Begriff „Zahl überhaupt" definitorisch etwas ausgesagt wird.) Denn unter sie fällt das Jagdsignal ebenso, wie die mimische Gebärde, die als „Zahlen" zu bezeichnen doch wohl kaum jemand wagen wird. Daher werden auch diese „mannigfaltigen Zwecke" sehr bald eingeschränkt. Und zwar — das ist das für uns Interessante — geht SCHRÖDER bei der Definition der zunächst zu definierenden Zahlklasse der natürlichen Zahlen sofort auf „zu zählende Dinge" zurück. Solche zu zählenden Dinge müssen, um eine geeignete Grundlage abzugeben, „disjunkt" sein[2]) und doch wieder etwas Gemeinsames haben[3]), jedes von ihnen wird als „Einheit" bezeichnet[4]), und die natürliche Zahl erscheint so als „eine Abbildung der Einheiten in Hinsicht ihrer Häufigkeit"[5]). Diese Definition berücksichtigt zunächst nur die einzelnen disjunkten Einheiten.[6]) Deren Zusammenfassung wird dann unter Zurückgehen

---

[1]) SCHRÖDER *Algebra (97)* S. 2.

[2]) SCHRÖDER *Algebra (97)* S. 3.

[3]) SCHRÖDER *Algebra (97)* S. 4.

[4]) SCHRÖDER *Algebra (97)* S. 5.

[5]) SCHRÖDER *Algebra (97)* S. 6. — Jede Zahl wird nämlich durch eine Einheit, die Eins, abgebildet (S. 5). Die natürliche Zahl erscheint zunächst als Summe von Einern — eine nicht stichhaltige Erklärung, da über Summe bisher noch keine Silbe gesagt worden ist. Die im Text angegebene Definition kann man als eine betrachten, die sie ersetzen oder erklären soll.

[6]) Verstände man unter „Summe" hierbei nichts anderes, als eine einfache Zusammenstellung, so wäre die natürliche Zahl nichts anderes als das bekannte „Eins, Eins, Eins" des Nestelschwaben.

auf den ursprünglichen Ausgangspunkt durch die folgende Definition gegeben: Die natürliche Zahl ist „gewissermaßen eine Abbildung der zu zählenden Dinge hinsichtlich ihrer Häufigkeit.“[1])

So mündet SCHRÖDERs Definition in eine an mengentheoretische Begriffe anmutende Formulierung aus. Sie ist aber trotzdem ungemein von jeder Entwicklung der Mengenlehre verschieden. Das zeigt sich besonders da, wo es sich darum dreht, für die Gesetze selber eine Grundlage zu schaffen.[2])

Es ist eine der sonderbarsten Erscheinungen in der Geschichte der Wissenschaft, daß E. SCHRÖDER, der ja zum mindestens Mitschöpfer der formalistischen Logik war, aus dem Empirismus hervorgegangen ist. Wir wollen uns hier nicht weiter in die Folgerungen vertiefen die aus einer solchen Stellung SCHRÖDER's gezogen werden könnten. Wir wollen hier nur den — unserer Meinung nach mit der Grundauffassung SCHRÖDER's notwendig zusammenhängenden — Zirkelschluß angeben, in dem sich die obige Definition bewegt:

Der Begriff des Zählens als eines Abbildens der Einheiten, also der zu zählenden Dinge, setzt den Begriff der Zahl als bestimmt voraus[3]), während er ihn doch allererst klarlegen sollte.

---

[1]) SCHRÖDER *Algebra (97)* S. 6.

[2]) Wir verweisen als Beispiel hierfür auf das „Axiom von der Inhärenz der Zeichen“: „Es gibt uns die Gewißheit, daß bei allen unseren Entwickelungen die Zeichen in unserer Erinnerung — noch fester aber am Papiere — haften. „Wir gewinnen diesen Grundsatz“ — das ist das Bedeutsame — „aus einer sehr reichhaltigen Erfahrung durch induktorische Ausdehnung oder Verallgemeinerung“ (SCHRÖDER, *Algebra (97)* S. 17). (Von diesem Axiom wird dann der Satz abgeleitet, daß die natürliche Zahl unabhängig von der Aufeinanderfolge der Einer sei.) — Wenn man unter „Empirismus“ eine Lehre versteht, die alle und jede Erkenntnis methodisch auf „Erfahrung“ zurückführen will, so dürfte daher der zitierte Satz woh ausreichen, die Stellung SCHRÖDER'S in diesem Punkte festzustellen. — Der im Text angegebene Zirkelschluß ist natürlich nur ein Sonderfall des allgemeinen Schlusses, gegen den Empirismus überhaupt (§ 9 S. 27 d. A.).

[3]) Vgl. den nächsten Absatz.

Es macht sich hier etwas Ähnliches bemerkbar, wie wir es schon seinerzeit bei der Grundlegung der Differential- und Integralrechnung festgestellt hatten.[1]) Die Zahl aus dem Zählen und namentlich aus dem Zählen von Dingen ableiten zu wollen, wird niemals Erfolg haben, da ja Zählen nichts anderes bedeutet, als eine (meist äußerliche) Anwendung des Zahlbegriffes. Denn wie will man den Begriff des „Zählens" angeben, ohne auf den der Zahl grundlegend sich zu stützen? Zur begrifflichen Erklärung des Zählens ist der Begriff der Zahl unumgänglich.

Eine tiefergreifende Fundierung versucht PASCH zu geben. Seine Erklärungen der Irrationalzahlen und der natürlichen Zahlen im Sinne DEDEKIND'S werden durch andere Untersuchungen über Dinge und Namen, Früher und Später u. a. m. vorbereitet. Die Erörterungen PASCH'S kann man als einen Versuch auffassen, den Mengenbegriff auf den allgemeineren Dingbegriff zurückzuführen und dadurch den mengentheoretischen Untersuchungen die noch fehlende erkenntnistheoretische — oder logische — Grundlage zu geben.

Für unsere Betrachtungen kommt es sonach wesentlich darauf an, wie der Begriff des „Anderen" eingeführt und ob er als ein weiterhin und wodurch zu erklärender Begriff aufgefaßt wird. Denn es ist von vornherein doch keineswegs ausgeschlossen, daß der Begriff des „Anderen" nicht auf eine allgemeine Dingkategorie und eine logische Gleichung zurückgeführt werden könne.

Da ist nun freilich festzustellen, daß PASCH in seinen Darlegungen diese Aufgabe nicht erkannt oder nicht berücksichtigt, jedenfalls sie nicht gelöst hat.

„Als Ding gilt zunächst nur Wahrgenommenes oder Wahrnehmbares. Ein dem Ding und nur ihm zukommender Name heißt Eigenname. Unter der Angabe eines Dinges verstehen wir eine Bezeichnung des Dinges mit einem Eigennamen oder einen anderen Hinweis auf das Ding Jedem Ding können Eigennamen erteilt werden Sind einem Dinge

---

[1]) S. 83 d. A.

ein oder mehrere Eigennamen erteilt worden, so können ihm noch andere erteilt werden. Name und Angabe sind selbst Dinge.“[1])

Ganz abgesehen davon, daß wir hier gleich in den einleitenden Worten mit einer Fülle von Begriffen überschüttet werden, wie „Wahrnehmbares“, „Name“, „Benennung“, „Hinweis“, „Angabe“, die erklärend benutzt werden und doch sicherlich einer Erklärung bedurft hätten[2]), erscheint hier plötzlich das Wörtchen „andere“ Und zwar stützt sich sein Gebrauch nicht auf die Begriffe „Ding“ oder „Name“ oder sonst einen der vorher erwähnten Begriffe. Dieses „Andere“ wird auch nicht etwa in der Weise eingeführt (wie wir es später bei der Axiomatik sehen werden), daß es eine Relation zwischen Begriffen festlegt und dadurch in gewisser Beziehung als „definiert“ angesehen werden könnte — wenigstens würde dann die Diskussion auf dieses Gleis geschoben werden —; das „Andere“ tritt vielmehr als Eigenschaft von „Eigenname“ und dadurch von „Hinweis“ und „Bezeichnung“ auf.[3])

Es ist fernerhin zu bemerken, daß durch die unumschränkte Zulassung „anderer“ Eigennamen die natürlichen Zahlen implizite nicht nur etwa bis zur 2, sondern in ihrer ganzen Reihe vorausgesetzt werden. In dem Sinne nämlich, daß es „immer wieder andere“ Eigennamen geben muß, wenn der Grundsatz wirklich ausgedacht wird.

Es könnte so aussehen, als gelte dieser Einwand auch für jede Begründung der Mengenlehre Demgegenüber ist festzustellen, daß seine Gültigkeit nur auf einen gewissen Kreis von Fundamentierungsversuchen beschränkt ist; nämlich auf den, bei welchem, wie bei PASCH, die Mög-

---

[1]) Vgl. hierüber PASCH *Irrationale Zahlen (77)* sowie *Grundlagen (76)* S. 22ff. und S. 98ff.

[2]) PASCH *Grundlagen (76)* S. 1; vgl. die nächste Anm. d. A.

[3]) In *Veränderliche (78)* hat PASCH gerade diese Begriffe mit Ausnahme des „Wahrnehmbaren“ — über das nichts gesagt wird — als Grundbegriffe anerkannt. Das widerspricht aber dem § 1 der *Grundlagen (76)* nur dann nicht, wenn „Ding“ durch „Wahrnehmbares“ „erläutert“, also mit ihm — und sei es nur „zunächst“ — in gewisser Hinsicht identifiziert wird.

lichkeit, immer wieder einzelne willkürliche Wahlakte wirklich vorstellbar auszuführen, zur prinzipiellen Grundlage der Untersuchungen gemacht wird.[1]) Denn hierbei ist, um die einzelnen Wahlakte voneinander zu unterscheiden und sie nicht durcheinander zu werfen, unbedingt erforderlich, daß sie irgendwie geordnet vorgestellt werden. Diese Ordnung muß, da es sich „zunächst“ nur um „Wahrgenommenes oder Wahrnehmbares“ handelt, irgendwie auf räumlich-zeitliche Ordnung zurückführbar sein. Somit muß sie sich auf Koordinaten, im allgemeinen mathematischen Sinne des Wortes als Bestimmungszahlen, stützen können. Sonst kann ja von einer klaren wissenschaftlichen Erkenntnis der Dinge nicht die Rede sein.

Wir weisen als Gegenbeispiel zu dem eben erwähnten Versuch der Begründung der Mengenlehre auf den Kreis von Lösungsversuchen hin, innerhalb dessen die „Menge“ als allgemeines (oder irgendwie spezialisiertes) Gesetz auftritt.[2]) Die Menge der separierten Wahlakte erscheint hierbei als Sonderfall, der erst nach Einführung der natürlichen Zahlen in die Mengenlehre einzutreten braucht.

Ein ganz anderes Bild als die bisher angeführten Versuche gewähren die Bestrebungen, den Begriff der natürlichen Zahl auf die „Relation“ oder „Operation“ oder „Verknüpfung“ von „Dingen“, „Größen“, „Formen“[3]) zu stützen. Man wird nämlich auf diesem Wege über kurz oder

---

[1]) Klar ausgesprochen wird der „Akt“ als Grundlage der Mengenlehre bei DINGLER *Paradoxieen (23)* S. 310f., der aber dann die diskreten Einzeldinge durch eine „logische Fundamentaloperation“ zusammenfaßt. — Im Gegensatz zu diesen Versuchen stehen z. B. die Mengenauffassungen von WEYL und DEDEKIND.

[2]) Hat man übrigens erst einmal diese Auffassung der Menge anerkannt so sind Unterscheidungen unter den Mengen nur noch hinsichtlich der Wahl der Gesetze möglich. Ein besonders einfaches Bildungsgesetz ist z. B. das: Eine Menge soll alle die Dinge umfassen, auf die ich hinweisen werde. Den Unterschied, den WEYL zwischen diesen Mengen und „Mengen mit Bildungsgesetz“ annimmt (*Kontinuum (114)* S. 13), können wir nicht recht einsehen.

[3]) Über „Form“ vgl. hierbei S. 52 Anm. 2 d. A.

lang zu einem allgemeinen Begriff der Zahl gedrängt, der auch zugleich alle „Erweiterungen des Zahlbegriffes" umfassen soll, ja manchmal gerade zu diesem Zweck — von einer Zahlklasse zur anderen zu gelangen — ersonnen wordensein mag.[1])

Die ersten Beispiele einer solchen Theorie finden wir bei den GRASSMANN'schen und HANKEL'schen Darstellungen einer allgemeinen Formenlehre.[2]) Aber erst bei dem Letzteren erhalten sie den definitorischen Charakter, von dem wir eben sprachen. So wird die 1, der Grundstein des Systemes der natürlichen Zahlen — wie schon oben erwähnt — geradezu als „Modul" der Multiplikation „definiert", d. h. als die Zahl, die mit jeder anderen Zahl a multipliziert, die Gleichung befriedigt $a \cdot x = a$.

Da aber die Multiplikation als „zweite einfache Operation" festgelegt ist, so ist festzustellen, daß wir bei diesem Versuche auch nicht über den bisher gesteckten Rahmen der 2 hinauskommen. (Ja darin, daß die Multiplikation die zweite Operation ist, besteht sogar ihr einziges Unterscheidungsmerkmal von der Addition.) Es zeigt sich sonach bei dieser Begründung des Aufbaus der natürlichen Zahlen das sonderbare Schauspiel, daß die Null, die bei dem gewöhnlichen konstruktiven Aufbau der Zahlen erst nach allen natürlichen Zahlen auftritt, bei der HANKEL'schen Art det Begründung — bei der sie als Modul der ersten assoziativ-kommutativen Verknüpfung — zunächst als die Zahl, zum wenigsten als die erste Zahl, erscheint.

Eine überaus weit verbreitete Definition der Zahl ist die: sie sei ein „Zeichen, das ..." — und hier scheiden sich dann die Wege.

Die einen, wie HEINE[3]), fassen sie als **konkretes**, d. h. **mit den Sinnen greifbares Zeichen** auf. Hier-

---

[1]) Es scheint uns wenigstens kein Zufall zu sein, daß diese Methode gerade zu der Zeit auftritt, da die verschiedenen Bemühungen um die strenge Einführung der Irrationalzah einsetzten. Wir verweisen als ein Beispiel dieser Kombinierung auf HEINE *Funktionentheorie (39).*

[2]) Vgl. S. 52f. und 61ff. d. A.

[3]) HEINE *Funktionentheorie (39)* S. 173f.; vgl. PRINGSHEIM *Zahlenlehre (84)* und *Zahlbegriff (83).*

durch wird freilich die Frage nach der Existenz solcher Zeichen und infolgedessen der Zahlen gelöst, allerdings nur insoweit, daß eine Zahl immer existiert, sofern man sie vor sich hat.

Als erste Folgerung würde sich nun hieraus ergeben, daß sinnlich verschiedene Zeichen auch verschiedene Zahlen bedeuten. Es läge also sehr nahe, den Gebrauch des Gleichheitszeichens auf diese Tatsache zu gründen. Allerdings wäre dann $\frac{1}{3}$ von 0,33333 . . . sicher verschieden.

Aber wie man auch diese Folgerung umgehen mag — durch irgendeine anderweitige Definition des Gleichheitsbegriffes — auf alle Fälle kann man den Satz für diese Auffassung der Zahl als maßgebend bezeichnen: die Zahl ist ein Sinnending. Sie soll sich nun von den anderen Dingen dadurch unterscheiden, daß sie gewissen Operationen unterworfen werden kann, z. B. sollen zwei Zahlen miteinander verknüpft, stets wieder eine dritte Zahl geben. Nun gibt es ja bekanntlich Sinnendinge, die tatsächlich diese Bedingung erfüllen, z . B. Schafherden. Aber inwieweit solche Sinnendinge wieder die Eigenschaft besitzen, die sich in dem Worte „Zeichen“ ausspricht — sei es nun, welche es auch sei —, müßte doch zum mindesten gezeigt werden! So daß wir in diesem Sinne doch wieder auf einen Existenzbeweis zurückgeführt werden. Ist es etwa erlaubt, Schafherden als „Zeichen“ zu nehmen? Dem gemeinen Sprachgebrauch, nach welchem ein „Zeichen“ ein Ding ist, dem ein anderes entspricht, das durch das „Zeichen“ bezeichnet wird, läuft diese Auffassung der Schafherde jedenfalls zuwider.[1])

[1]) Uns ist, abgesehen von der einfachen Aufeinanderhäufung, nur ein Beispiel zur Hand, das die erwähnte Bedingung befriedigt: nämlich die juristische Person. Bei ihr werden mehrere Rechtssubjekte wieder zu einem Rechstssubjekt zusammengefaßt. Die Rechtssubjekte, die zusammengefaßt werden, können nun selbst wieder juristische Personen sein. Beispiele hierfür finden sich im täglichen Leben massenhaft: etwa Vereine, deren Mitglieder nur Vereine sind. (Hier ist zu unterscheiden der Verein [universitas], der nach außen hin als Einheit auftritt, von der Gesellschaft

Überhaupt ist nicht recht abzusehen, wie auf Grund von Wahrnehmungen ermittelt werden soll, ob einem Sinnendinge erstens die Eigenschaften eines „Zeichens" und zweitens diejenigen Eigenschaften eigentümlich sind, als Forderungen, die „von Operationswegen" an es gestellt werden müssen. Mit anderen Worten: Es dürfte schwer sein, von einem Sinnendinge festzustellen, ob es eine Zahl ist.

Daher kam man denn auch darauf, diese Zeichen auf ein bestimmtes System einzuschränken und sie in diesen Grenzen willkürlich festzulegen.[1])

Aber diese Stellung trägt eine doppelte Schwierigkeit in sich. Zum ersten hofft man, bei Festlegung des Systems, daß jeder sich dieser Konvention gutwillig fügen werde. Man macht also die Wahl der Zahlen, mithin die Wahl der Grundlagen der Mathematik von dem Belieben des Schülers abhängig. Von einer unbedingten Gewißheit ist keine Rede mehr, ein einziges „Nein" kann die ganze Wissenschaftlichkeit der Mathematik vernichten, ohne doch — das ist wohl zu merken — den Gedanken der Wissenschaft als solchen preiszugeben!

Zum zweiten ist zu berücksichtigen, daß alles, was nicht durch die Bezeichnungen des bestimmten, vorgeschriebenen Ziffernsystemes ausgedrückt ist, auch nicht „Zahl" zu sein, d. h. nicht denselben Gesetzen zu gehorchen braucht. Man muß also bei jedem neuen Zeichensystme

---

[societas], bei der das nicht der Fall ist.) Über diese „Zentralvereine" s. ÖRTMANN, Paul: *(Kommentar zu) Bürgerliches Gesetzbuch. Allgemeiner Teil.* 2. Aufl. B. 1908. S. 142 und 144. — Im Staatsleben tritt als meistbekanntes Beispiel der Bundesstaat als Vereinigung mehrerer selbständiger Staaten zu einem neuen Staate auf. — Fraglich ist hierbei nur der für unsere Erörterung nicht unerhebliche Punkt, ob man solche juristischen Personen und deren Vereinigung (etwa die Vereinigung der „Landschaften" in der „Zentrallandschaft") als wahrnehmbar und somit als Grundlage für ein Zahlensystem nehmen kann. Wir glauben das verneinen zu müssen, so daß als „Zahlen" nur den Schafherden ähnliche Gebilde in Betracht kommen.

[1]) So PRINGSHEIM *Zahlenlehre (84)* S. VII, 1, 4f. Vgl. auch die Zusatzbemerkung S. 920f.

untersuchen, ob es auch noch den Regeln eines „Zahlen“-systemes genügt.

Will man endlich den Standpunkt konsequent durchführen: „Zahl ist ein Zeichen, das sinnlich wahrnehmbar ist und folgenden Verknüpfungsgesetzen gehorcht: . . . .“, so ist wohl darauf Acht zu haben, daß die Gesetze die Zahlzeichen machen. Man kann nicht einfach sagen: „Das Zeichen x ist eine Zahl“, ohne hinzuzufügen und zu beweisen: „denn es genügt den an eine Zahl zu stellenden Bedingungen“.

Man kann aber — das wird vielfach übersehen — auf diesem Wege zu wirklich allgemeinen Sätzen garnicht kommen. Wir nehmen etwa als Beispiel einer Bestimmungsgleichung für „Zahl“-Zeichen die Regel an, daß auf jede Zahl wieder eine Zahl folgt. Läßt sich nun beispielsweise von einem Zeichen A nachweisen, oder wird für es diktatorisch bestimmt, daß es auf ein Zeichen B folge, so ist (nachgewiesen oder verfügt worden, daß) A eine Zahl und B eine Zahl (sei).[1]) Diese Überlegung gilt für jedes Zeichen, für das das betreffende Gesetz gilt. Nun ist aber ausdrücklich festzustellen, daß die Zeichen, für die diese Darlegungen in Betracht kommen, also alle, die überhaupt dem Nachweis oder der Bestimmung unterworfen werden, ob die betreffende Eigenschaft bei ihnen vorliegt — mit anderen Worten alle überhaupt in der Grundlegung vorkommenden Zeichen — daß alle diese Zeichen nicht Zeichen für Zahlen sein können, sondern selber Zahlen sein müssen. Sie können unter Voraussetzung dieser Stellung nicht repräsentativ sein, d. h. nicht alle möglichen Zahlen vertreten.

---

[1]) PRINGSHEIM versucht, nachdem er dargelegt hat, daß das System aller Kombinationen der Zeichen 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 die Eigenschaften einer Zahl hat (d. h. daß jede einzelne Kombination als solche gewisse Bedingungen erfüllt), als „Zahlzeichen“ „kleine lateinische Buchstaben“ einzuführen, um „allgemeine“ Beziehungen zwischen „beliebigen“ Zahlen herstellen zu können. Er vergißt aber den Nachweis, daß ein kleiner lateinischer Buchstabe eine Zahl st. Oder „tut er nur so, als ob“ er Zahlen vor sich hätte und „als ob“ er eine Zahlenlehre schriebe? (PRINGSHEIM *Zahlenlehre* (*84)* S. 8).

Sämtliche Beziehungen müssen Beziehungen zwischen einzelnen bestimmten Zahlen bleiben, etwa zwischen der Zahl A und der Zahl B. Fassen wir das zusammen, so lautet diese für unsere späteren Betrachtungen wichtige Bemerkung folgendermaßen:

Bei einer konsequenten Durchführung der Definition: „Zahl ist ein sinnlich wahrnehmbares Ding, das bestimmten Operationen genügt", sind Festsetzungen über allgemeine Zahlen und Zahlgleichungen garnicht möglich. Da solche aber für den Aufbau der Mathematik nötig sind, so ist die Auffassung der Zahlen als sinnlich wahrnehmbarer, durch konventionell festgelegte Regeln verbundener Zeichen nicht haltbar.

Es fragt sich nun, ob ähnliche Überlegungen gelten, wenn man das „Zeichen" nicht so scharf sensualistisch als ein Hier-Jetzt Gegebenes auffaßt. Mit dieser Auffassung nähern wir uns einer solchen, wie sie der Axiomatik namentlich HILBERT'S zugrunde liegt.

§ 18. Die Axiomatik.

Wenn wir die Axiomatik, deren Untersuchungen in Arithmetik und Mengenlehre noch nicht als abgeschlossen bezeichnet werden können, trotz dieser Unfertigkeit in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen, so geschieht das deshalb, weil die Wege, auf denen sie in Zukunft fortgeführt werden soll, von ihren hervorragendsten Vertretern doch schon programmatisch vorgezeichnet sind, mag die Einzelforschung auch noch nicht zu einem endgültigen Resultat durchgedrungen sein. Ob sich die vorgetragenen Ideen als durchführbar erweisen, bleibt daher noch abzuwarten, solange bis der Versuch in seinen Einzelheiten fertig vorliegt. Wir wollen das einstweilen beschrittene Stück Weges mitgehen. Dabei wird uns insonderheit zu prüfen obliegen, inwieweit die Voraussetzungen geeignet sind, die aus ihnen gezogenen Schlüsse zu rechtfertigen.

Wir waren bislang in der Forschung nach den Bestandteilen, aus denen sich der Zahlbegriff notwendig aufbaut, bis zu dem Begriffe der natürlichen Zahl und über diesen hinaus bis zu dem des „Anderen" und der Menge vorgedrungen. Es war bisher nicht gelungen, dieser Begriffe Herr zu werden, dadurch, daß man sie auf andere zurückführte. Vielleicht gelingt das mit Hilfe der axiomatischen Methode?

Jedermann, der die Bedeutung kennt, die die Axiomatik in letzter Zeit für die Diskussion der Prinzipien der Mathematik gewonnen hat, wird es für richtig halten, daß ihre Untersuchungen bei einer Erörterung über grundlegende mathematische Begriffe nicht unberücksichtigt bleiben. Andererseits wird jeder, der mit der Geschichte dieses Wissenszweiges vertraut ist, verstehen, wenn sich Zweifel an der Zuständigkeit der Axiomatik in *unserer* Art der Fragestellung erheben. Müssen wir nicht etwa, wenn wir den Boden der Axiomatik betreten, alle Hoffnungen beiseite schieben, bei ihr eine Lösung für unsere *begriffliche* Fragestellung zu finden? Es könnte zunächst so scheinen. Ist doch die Axiomatik entstanden bei dem Bestreben, die Widerspruchsfreiheit der Geometrie für alle Zeiten sicher zu stellen. Das Ziel wurde erreicht; aber unter ausdrücklichem *Verzicht auf eine Definition der Grundbegriffe* in bisher üblichem Sinne.

Bislang hatte man die Grundlegung der Geometrie durch eine Verschärfung der Definitionen der Grundbegriffe, etwa des Punktes, der Geraden, der Ebene, des Körpers, des Raumes usf. durchführen wollen. In striktem Gegensatz hierzu lehnte die Axiomatik derartige Miniertätigkeit im Feld der Definitionen der Grundelemente ab. Vielmehr ging man so vor: Es wurden Dinge betrachtet und benannt, zwischen ihnen Beziehungen axiomatisch festgelegt. Letztere ließen sich als solche erweisen, die — unter Voraussetzung der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik — nie zu einem Widerspruch führen konnten.[1])

[1]) Vgl. das ausführliche grundlegende Werk von HILBERT *G. d. G. (41)*; in dem skizzenhaften Abriß: *Über G. d. G. (42)* wird dagegen vom Recht des Definierens Gebrauch gemacht.

Ein neues Feld erstand der axiomatischen Methode in der Aufgabe, die Paradoxieen der Mengenlehre zu bewältigen. Hier ist sie gegenwärtig wohl noch in voller Arbeit, ein „System von Axiomen der Mengenlehre aufzustellen, weit genug, um alles zu umfassen, was es an positiven Resultaten gibt, eng genug, um Widersprüche auszuschließen, und endlich in solcher Form, daß man das Problem der Widerspruchslosigkeit auf ein engeres und womöglich bekannteres Gebiet zurückführen kann"[1]).

Manchmal ist von Mathematikern der Anspruch erhoben worden, daß die Mengenlehre das Fundament der gesamten Mathematik, ja vielleicht der Logik, sei.[2]) Wäre dieses der Fall, so müßte es möglich sein, sie ohne Zuhilfenahme irgend welcher „fremder Begriffe" (etwa aus der Analysis), insbesondere ohne Zuhilfenahme des Zahlbegriffes zu begründen. Nun ist aber, selbst wenn dieses als nicht gelungen bezeichnet werden müßte — wozu wir nach unseren bisherigen Untersuchungen natürlich stark neigen werden — der mengentheoretische Kalkül derart wichtig für die Grundlegung der Analysis — vgl. den DEDEKINDschen Schnitt! — daß es sich auf alle Fälle lohnt, zu untersuchen, ob nicht die axiomatische Methode — auf die Mengenlehre angewandt — die bisher festgestellten Unstimmigkeiten bei der Fundierung der Mengenlehre unabhängig von der natürlichen Zahl vermeiden kann. Wir betrachten daher im folgenden eine Reihe von Versuchen, die nach verschiedenen Richtungen gehend, dieses eine Ziel vor Augen haben, das eben gekennzeichnet worden ist, nämlich die Paradoxieen der Mengenlehre aus der Welt zu schaffen.

Als besonders geeignete Beispiele hierfür wählen wir die Arbeiten von DINGLER und SCHÖNFLIES. Im allgemeinen ist zunächst zu bemerken, daß bei diesen beiden Forschern ganz verschiedene Interessen vorliegen. Für SCHOENFLIES ist es lediglich eine interne Angelegenheit der Mengenlehre selbst, ihr eine sichere Grundlage zu

---

[1]) BERNSTEIN *Finitismus (3)* S. 71.
[2]) So HAUSSDORFF *Grundz. (38)* S. 1.

schaffen. Bei DINGLER dagegen liegt das vor, was man ein „philosophisches Interesse“ zu nennen pflegt. Der Verschiedenheit dieser Interessen entspricht denn auch nicht nur die Wahl des Ausgangspunktes, sondern auch die Form der Darstellung und die Weiterentwicklung der Ansichten, die sich zwischen den einzelnen Arbeiten bei beiden wahrnehmen läßt.

SCHOENFLIES ist bekanntlich als einer der bestunterrichtetsten Forscher auf dem Gebiete der Mengenlehre anzusehen.[1]) Die Untersuchungen von ihm, die in unseren Bannkreis fallen, stützen sich entschieden auf diese Kenntnis. Sie gehen wesentlich in der Richtung, die „Verblüffung“ und das Mißtrauen gegen den allgemeinen Mengenbegriff zu beseitigen, das die Paradoxieen RUSSELL'S und anderer hervorgerufen zu haben scheinen.[2]) Inwieweit zum speziellen Studium der Grundlagen die Untersuchungen von ZERMELO und der Widerspruch gegen eines ihrer positiven Resultate angeregt haben, lassen wir hier dahingestellt. ZERMELO lieferte ein Axiomsystem[3]), das — nach der Angabe von BERNSTEIN — eine Diskussion kaum hervorgerufen hätte, wenn nicht der Verdacht entstanden wäre, daß es zu viel in sich schließe.[4]) Denn abgesehen von den

---

[1]) Bekannt und unübertroffen in seiner Art ist sein *Bericht (89) (95).*

[2]) SCHÖNFLIES *Definition (93)* S. 250ff.

[3]) Vgl. ZERMELO *Untersuchungen (116)* und BERNSTEIN *Finitismus (3).* In der von ZERMELO aufgestellten Axiomatik wird überall von „zwei“ Elementen gesprochen. Seine Darlegungen führen also für unsere Frage nicht weiter, als die von SCHÖNFLIES. — Außerdem hat FRÄNKEL, *Grundlagen (28)* nachgewiesen, daß die sieben ZERMELO'schen Axiome nicht zur Begründung der Mengenlehre ausreichen. — Daher sehen wir von einer Besprechung dieses Versuches ab.

[4]) BERNSTEIN behauptet, um den Einwand zu bekämpfen, daß die Begriffsbildungen GEORG CANTOR'S ein letztes Aufflackern mittelalterlicher Scholastik darstellten, folgendes: „Man wähle irgendein Problem auf Grund der Begriffe der „wirkenden Gnade“ oder der „zuvorkemmenden Beihilfe“, und man wähle andererseits ein beliebiges Problem aus den Abhandlungen GEORG CANTOR'S. Man lasse jeweils zwei unabhängig von einander arbeitende Forscher

unumstößlich sicheren Wahrheiten, die sich aus ihm ergaben, folgte auch noch der Satz, daß das Kontinuum wohlgeordnet sei. Diesen Satz hielt aber SCHÖNFLIES zum mindesten für fraglich[1]), und so konnte der obengenannte Verdacht gegen das ZERMELO'sche Axiomsystem entstehen.

Die gedankliche Grundlage, die SCHÖNFLIES seinen Überlegungen gibt, ist die unbedingte Anerkennung des Satzes vom Widerspruch als eines sondernden Prinzips bei der (sonst unumschränkten) mathematischen Begriffsbildung. Er gibt den Satz meist in der Form: „Sind A, B irgendwelche Dinge oder Begriffe, so sagt der Satz vom Widerspruche aus, daß von den zwei Sätzen:

1. dem A kommt die Eigenschaft B zu; und

2. dem A kommt die Eigenschaft B nicht zu.

stets einer und nur einer richtig ist."[2]) Die durch diesen Satz hervorgerufene Sonderung der Begriffe erfolgt nun in der Weise, daß „Begriffe" für die der Satz des Widerspruches, resp. des indirekten Beweises versagt", die also

---

das eine und das andere Problem bearbe ten. Ist das Ergebnis in beiden Fällen dasselbe, nämlich Nichtübereinstimmung oder Übereinstimmung, so ist beides gleichzeitig Scholastik oder Wissenschaft. Wenn aber, wie wir nicht zweifeln, im ersten Falle sich verschiedene Ergebnisse zeigen, im zweiten aber die identische Lösung erscheint, so ist für alle Zeiten durch himmelweiten Abstand getrennt, das eine müßige Scholastik, das andere exakte und unvergängliche Wissenschaft." — Man weiß nicht recht, was man zu dieser Behauptung sagen soll, wenn man zuvor gehört hat, daß zwei so bedeutende Forscher, wie ZERMELO und SCHÖNFLIES in punkto der Wohlordnung des Kontinuums zu widersprechenden Ansichten gelangt sind! Ist nun die Mengenlehre Scholastik, oder stimmen die Ansichten von SCHÖNFLIES und ZERMELO überein? Eines von beiden kann nur richtig sein. — Wir würden diese Bemerkung von BERNSTEIN gar nicht erwähnt haben, wenn hier nicht versteckt der Versuch gemacht würde, das Wesen der Wissenschaft im Einzelwissen und dessen Resultaten zu suchen — ein Punkt, auf den wir natürlich die größte Achtsamkeit haben.

[1]) SCHÖNFLIES *Wohlg. Mengen (91).* — Auch durch die Reduktion, die J. KÖNIG dem Problem verliehen hat *(Kontinuum (60))* ist die Lösung noch nicht herbeigeführt worden.

[2]) SCHÖNFLIES *Paradoxieen (92)* und *Definition (93).*

nicht widerspruchsfrei sind, „weder Gegenstand noch Hilfsmittel wissenschaftlicher Betrachtung“ sein können.[1])

Ähnliche Anschauungen will nun SCHÖNFLIES in der Axiomatik wiedererkennen. Sie erscheint ihm als die einzige Möglichkeit, die Grundlagen der Mathematik frei von allem philosophischen Schauwerk zu betrachten. Ihre Aufgabe besteht demnach, seiner Meinung nach, lediglich darin: „die mathematischen Erkenntnisse auf gewisse Grundbegriffe und Grundtatsachen einfachster Art zurückzuführen; aus ihnen ist alles andere den logischen Gesetzen gemäß zu schließen“[2]). Daher finden sich in jedem axiomatisch begründeten Aufbau zweierlei Bestandteile:

I. Die allgemeinen Regeln jeglichen logischen Schließens; und

II. die Voraussetzungen, die das spezielle mathematische Wissensgebiet charakterisieren.“ Diese zweite Gruppe von Bestandteilen, die in den Axiomen zugrunde gelegt ist, zeigt nun wieder zwei Besonderheiten, denen jeder derartige Aufbau entsprechen muß.

1. Der Satz des Widerspruches, wie er oben angegeben wurde, auch hier zugleich wieder als Grundlage des indirekten Beweises genommen.

2. „Die auf kontradiktorischer Grundlage ruhende Einteilung eines mathematischen Objektes oder einer

---

[1]) SCHÖNFLIES *Parad. (92)* S. 20. KORSELT hat *(Paradoxieen (62))* diesem letzten Satz nur insofern widersprochen, als man Begriffe, um sie als widerspruchsvoll zu erkennen, doch erst einmal haben und betrachten müsse. Als Ausgangspunkt für eine Wissenschaft dürften Begriffe daher stets nur unter hypothetischem Vorbehalt ihrer Existenz benutzt werden. Dieser Einwand verkennt nun aber, daß man Begriffe, die man zum Ausgangspunkt, also zu systematischer Grundlage einer Wissenschaft macht, ja das ganze Gebäude derselben bestimmen, also durch deren Verlauf nie als widerspruchsvoll erkannt werden können. Nur in der Kombination mit anderen Begriffen können nämlich Widersprüche auftreten. Welcher von den kombinierten Begriffen aber den Widerspruch hervorruft, ist innerhalb der betreffenden Wissenschaft nicht abzusehen.

[2]) Diese und die folgenden Erörterungen knüpfen an SCHÖNFLIES *Definition (93)* an.

mathematischen Beziehung in einander ausschließende Unterscheidungen".

Denn die logische Besonderheit der Mathematik ist die, daß sie eine kontradiktorische Wissenschaft ist. Bei ihr schließt jede einzelne Beziehung logisch alle anderen aus. Oder wie eine sehr treffende Ausdrucksweise sagt: Jedes einzelne Objekt ist logisch isolierbar. Die Eigenart der axiomatischen Methode besteht nun darin, daß sie an die Spitze der Erörterung Begriffe und Beziehungen stellt, deren mathematischer Inhalt einzig und allein durch die Axiome bestimmt ist, die sie miteinander verbinden. Aus diesen Begriffen und Beziehungen in ihrem axiomatischen Zusammenhang baut sich dann das ganze Gebäude der Mathematik auf.

Abgesehen von den in den Axiomen zugrunde gelegten Begriffen und Beziehungen gibt es dann noch Stammbegriffe logischer Art, die sich somit ebenfalls durch die gesamte Mathematik hindurchziehen (identisch, eindeutig, jeder u. a.).

Als besonders bedeutungsvoll erweist sich daher auch bei der Axiomatik im Ausbau der Arithmetik die Frage der Definition. „Jede Definition enthält einen Namen für eine Sache, oder, da es sich hier nur um mathematische Definitionen handelt, für ein mathematisches Objekt. Dieses Objekt wird durch die Definition so eingeführt, daß sie seinen mathematischen Inhalt angibt. Offenbar kann dies nur mittels bereits vorhandener Begriffe oder Beziehungen geschehen." Eine Ausnahme von dieser letztgenannten Bestimmung bilden natürlich die Grundbegriffe und Grundbeziehungen. Sie vertragen eine derartige Zurückführung nicht, höchstens kann man sagen, daß die Axiome zugleich eine Gruppe von Begriffen definieren. Abgesehen also von den in dem Axiomsystem gegebenen Begriffen führt jede Definition einen neuen Begriff ein. Sie bedarf somit eines Beweises, um Anspruch auf mathematische Gültigkeit machen zu können. Nämlich des Beweises dafür, daß die durch sie zum Ausdruck kommende Beziehung auch wirklich aus den Axiomen gefolgert werden könne.

In der letzten Bemerkung liegt nun für den Mengentheoretiker zweifelsohne eine sehr bedeutsame Erwägung vor. Ist er nämlich von der Existenz einer gewissen Beziehung überzeugt, die sich aus einem bestimmten vorgelegten Axiomsystem nicht erschließen läßt, so wird er das Axiomsystem als zu eng verwerfen. Und umgekehrt, läßt sich eine Beziehung aus dem Axiomsystem ableiten, von deren Falschheit er durchdrungen ist, so muß er dieses System als zu weit abweisen. Wir werden diesen Gedanken, der ja leicht zu einer methodischen Frage für die Axiomatik überhaupt ausgearbeitet werden kann, in etwas veränderter Form aufzugreifen haben.

Da SCHÖNFLIES hier ausdrücklich erklärt: „Die Mengenlehre kann unmöglich die Aufgabe haben, bei der axiomatischen Grundlegung ihrer Begriffe und Beziehungen auch das gesamte Gebiet der Arithmetik und Analysis mit vor ihr Forum zu ziehen. Sie muß sich darauf stützen können, daß sie gewisse Hilfsbegriffe von den anderen Wissenschaften entlehnt, insbesondere also den Funktionsbegriff und das ihm äquivalente ZERMELO'sche Auswahlprinzip.“[1]) — da also SCHÖNFLIES sicherlich auch den Zahlbegriff zulassen würde, so können wir das von ihm nun aufgestellte spezielle Axiomsystem der Mengenlehre außer Acht lassen. Erwähnt sei nur, daß die Menge hier durch ihre Elemente definiert wird, d. h. die gesamte Mengenlehre wird auf die zwischen zwei Dingen a und b bestehende Grundbeziehung a ε b (a ist Element von b) gegründet.[2])

Wir erwähnen diese beiden Tatsachen — den Verzicht auf die allmathematische Fundierung durch Mengenlehre und die Bestimmung der Menge durch ihre Elemente — deshalb, weil sie von SCHÖNFLIES später fallen gelassen worden sind.[3]) Neun

---

[1]) SCHÖNFLIES *Definition (93)* S. 249.

[2]) SCHÖNFLIES *Definition (93)* S. 245ff.

[3]) Die folgenden Erörterungen beziehen sich (unter Übergehung der vorbereitenden Schrift: SCHÖNFLIES *Grundlagen (94)*) auf SCHÖNFLIES *Axiomatik (96)*.

Jahre nämlich nach dem soeben betrachteten Aufsatz über die Stellung der Definition hat SCHÖNFLIES im Anschluß an die „vorbildlichen" Grundlagen der Geometrie von HILBERT eine „wortdefinitionsfreie" Axiomatik der Mengenlehre zu geben sich bemüht.

„Das Resultat erweist sich in zwei Punkten als durchaus eigenartig Die Vergleichung der Mengen bezüglich ihres Größencharakters ist nämlich nichts, was dem Mengenbegriff allein eigentümlich ist, sie betrifft allgemeiner alle Gebiete, für die man das Ganze und den Bestandteil unterscheiden kann. Die Axiomatik, die hier entwickelt wird, ist also richtiger eine Axiomatik der Größenlehre und zwar in dem besonderen Falle, daß es auch Größen von unendlichem Charakter gibt. Dies bedingt, daß die Elemente der Mengen im folgenden garnicht benutzt werden; immer nur bilden die an sich möglichen Beziehungen zwischen Ganzen und deren Teilen den Gegenstand der Untersuchung. . . . Für die Elemente der Mengen wird erst zum Schluß eine auf den Begriff der Teilmenge sich stützende Einführungsmöglichkeit gezeigt. Sie erscheinen als Teilmengen, die selbst nicht wieder in Teilmengen zerlegbar sind (gleichsam als Atome)."

Nun ist allerdings weder ausdrücklich auf die früher vertretene Meinung von der Unabhängigkeit der Arithmetik von der Mengenlehre Bezug genommen, noch auch geradezu das Gegenteil gesagt. Indessen ist doch der Begriff der „Größenlehre" derartig dehnbar, daß man nicht ganz genau weiß, ob nicht am Ende auch die „Zahlenlehre" mit in diesen Bereich eingeschlossen sein könnte. Das angegebene Kriterium ist auch nicht ohne weiteres durchführbar, da man z. B. bei den rationalen Zahlen — wie WEIERSTRASS — sehr wohl vom Ganzen und seinen Teilen reden kann, ob das aber bei natürlichen, negativen, irrationalen Zahlen auch noch in exakter Weise möglich ist? Um daher ganz sicher zu gehen, betrachten wir diesen Versuch auch in seinen Einzelheiten etwas genauer.

Wir stellen folgende Fragen an ihn:

1. Wie steht es mit der „Freiheit von der Wortdefinition"?

2. Ist die Bezeichnung „a ist ein Anderes als b" vermieden oder axiomatisch eingeführt?

3. Ist etwas darüber gesagt, wann ein Axiomsystem „zu weit" oder „zu eng" ist, und warum keine dieser Bezeichnungen auf das vorgelegte Axiomsystem paßt?

Die zweite Frage ist nur dann wichtig, wenn man die Mengenlehre unabhängig von der Arithmetik und jedem Zahlbegriff begründen will. Sie wird unwichtig, sobald diese Voraussetzung fällt, und man sich im Rahmen der speziellen vorgelegten Disziplin (Mengenlehre abhängig von Zahlenlehre) hält.

Die erste Frage ist auf alle Fälle mehr eine solche des „logischen Geschmacks", wenn wir so sagen dürfen. Es handelt sich unserer Ansicht nach bei der Entfernung von ausschließlich umschreibenden „Wortdefinitionen" — darunter sind doch wohl solche zu verstehen, die ein Wort durch andere ihm gleichbedeutende Worte ersetzen — mehr darum, ein Beiwerk abzutun, das der logischen Strenge und Geschlossenheit gefährlich werden kann, nicht aber um Etwas, was unter allen Umständen verderblich sein muß.

Wortdefinitionen sind, so möchten wir sagen, wie Säulen, die ein leichtes Vordach des Gebäudes tragen. Sie sind, wenn sie gut gewählt sind, oft geradezu ein künstlerischer Schmuck des Ganzen, vor dem sie stehen, und als solcher nicht zu verachten. In der von ihnen gestützten Vorhalle gewöhnt sich das Auge des Wanderers, der den Palast betreten möchte, an die Dunkelheit, die sich dem vom Tageslicht geblendeten Blick zunächst darinnen zeigt; sie geben notdürftigen ersten Schutz gegen Regen und Sturm — mit einem Worte: sie sind angenehm für den, der sich dem Eingang naht. Gefährlich werden sie freilich dann, wenn sich der unvorsichtige Architekt verleiten läßt, ihnen beim Um- oder Neubau eine Last zuzumuten, der sie nicht gewachsen sind. Deswegen ist es nötig, jeden Stein vor seiner Verwendung auf seine Solidität hin zu prüfen, und wenn er sich als nicht kräftig genug erweist, ihn durch einen anderen zu ersetzen. Eine logische Not-

wendigkeit zur Verbannung der Wortdefinitionen können wir dagegen nicht einsehen. Wir hätten daher die Frage auch schwerlich gestellt, wenn sie nicht von SCHÖNFLIES selber als Forderung aufgestellt worden wäre. Hat er nun seine Forderung strikte erfüllt? Das scheint uns nicht mit aller Entschiedenheit bejahend beantwortet werden zu können. Freilich ist die Grenze, innerhalb deren eine Definition eindeutig als Wortdefinition erkannt wird, nicht allzu scharf ziehbar. Aber wir finden in dem uns beschäftigenden System doch manche Ausdrücke, von denen man mindestens das Eine sagen kann, daß sie sehr an eine Umschreibung eines Wortes durch mehrere andere gleichbedeutende erinnern.

So gleich im Anfang: „Die mathematischen Objekte, von denen im folgenden die Rede sein wird, heißen Mengen (Teilmengen, Vereinigungsmengen). Alle sollen denselben Äquivalenzbedingungen genügen, die wir als Axiome der Äquivalenz (∼) einführen.“ Ferner die Einführung der Teilmenge: „Ist M′ Teilmenge von M, so soll dies durch M′ t M bezeichnet werden.“[1]) Und so würde sich vielleicht noch manche andere Stelle anführen lassen.

Wir haben hier als zweites Beispiel ein solches gewählt, bei dem ein Zeichen durch eine Zeile von Worten erklärt wird. Wenn man diese Art der Erklärung auch in den Bereich der „Wortdefinition“ aufnimmt, so können wir über unsere obige Apologie der Wortdefinition hinaus sogar noch einen Schritt tun und sagen: Wortdefinitionen sind unter Umständen zum Verständnis der vorgetragenen Lehre unumgänglich notwendig. — Jedoch kommt es uns auf diesen Punkt der Erörterung nicht allzusehr an. Wir

---

[1]) SCHÖNFLIES *Axiomatik (96)*. S. 176. — Hätten die Definitionen wie folgt gelautet: „Unter Menge (Teilmenge, Vereinigungsmenge) verstehen wir die Objekte, die den im folgenden gestellten Beziehungen genügen“. „Eine Gruppe dieser Beziehungen ist die, in denen das Zeichen „∼“ (lies „äquivalent“) vorkommt.“ — so würde wenigstens „Menge“ nicht lediglich umschreibend, sondern als Abschnitt eines Gebietes (Dinge) definiert sein, und ebenso die Beziehung „äquivalent“. Es bleibt allerdings noch die „Wortdefinition“: ∼ (lies „äquivalent“).

beantworten daher auch die Frage, ob SCHÖNFLIES seine eigene Forderung erfüllt habe, nicht präzise.

Dagegen wird für unsere Untersuchung wirklich die zweite Frage wichtig: Ist die Beziehung „a ist ein Anderes als b" vermieden oder axiomatisch eingeführt und erläutert?

Die Antwort hierauf lautet einfach: Keines von beiden ist der Fall. — Vielmehr wird ausdrücklich bei den Axiomen der Äquivalenz vorausgesetzt[1]: „Sind M, N, P verschiedene Mengen, so gilt ..." und nun folgt nicht etwa eine (axiomatische) Bestimmung der Beziehung „verschieden", sondern eine solche des Begriffes „äquivalent" auf Grund der Beziehung „verschieden". Um übrigens alle Unklarheit aus der Welt zu schaffen, wollen wir bemerken, daß SCHÖNFLIES das Wort „verschieden" einfach gleichbedeutend mit „andere" braucht. Hier natürlich in dem Sinne: Ist N eine andere Menge a s M, und P eine andere als M und eine andere als N ....

Selbst wenn man aber zugestehen wollte, daß hier keine Voraussetzung von Zahlbegriffen gemacht wird, so wird das im Verlauf der weiteren Durchsicht des Axiomsystems nicht zu halten sein. Späterhin braucht nämlich SCHÖNFLIES sogar das Wort zwei Mengen[2]). Es ist also die zweite Frage entschieden mit „Nein" zu beantworten. Man muß daher, wenn man an das SCHÖNFLIES'sche Axiomsystem herantritt, bereits über die Beziehung „anders" unterrichtet sein.

Inwieweit nun das betreffende System zu ‚eng" oder zu „weit" ist, ist selbstverständlich eine Frage, die in den engeren Kreis des mengentheoretischen Forums gehört. Sie interessiert uns nur insofern, als die Methode, die zu ihrer Lösung wohl angewandt werden könnte, die Prüfung des Axiomsystems an der durch es entwickelten Disziplin ist. Und zwar läßt sich eine solche Prüfung nicht anders als auf dem Wege satzweiser Ver-

---

[1]) SCHÖNFLIES *Axiomatik (96)* S. 175.

[2]) Bei der „Definierung" „fremder" Mengen. SCHÖNFLIES *Axiomatik (96)* S. 176.

gleichung denken.[1]) Auch diese Frage beantwortet SCHÖNFLIES nicht.

Inwieweit das vorgelegte Axiomsystem für die Mengenlehre ausreicht, können wir natürlich von unserem Gesichtspunkte aus in keiner Weise entscheiden. Ansprüche aber, die über den Rahmen der Mengenlehre hinausgehen, müssen wir unbedingt als unberechtigt bezeichnen. Das Resultat unserer Betrachtung der SCHÖNFLIES'schen Lehre ist somit recht negativ bei Beantwortung der uns interessierenden Fragen ausgefallen.

Im Gegensatz zu SCHÖNFLIES hat nun DINGLER seine Aufmerksamkeit von vornherein auf den Aufbau von Wissenschaften aus Axiomsystemen ganz im allgemeinen gerichtet.[2]) Für ihn sind die auf derartigen Axiomsystemen ruhenden Disziplinen nichts anderes als logische Gebäude. Jedoch gelangt auch er bei dieser abstrakten Fassung des Problemes zu ähnlichen Ergebnissen, wie SCHÖNFLIES bei seinen zuerst von uns betrachteten Untersuchungen über die Stellung der Definition in der Mathematik und den Aufbau dieser Wissenschaft als einer kontradiktorischen.

Die Grundvorstellung, von der DINGLER ausgeht, ist in kurzen Zügen folgende[3]): Eine Wissenschaft sei begriffsschriftlich aufgeschrieben. Hierbei werden Grundbegriffe durch gewisse Zeichen zu Sätzen verbunden. Auf diese Weise läßt sich ein „logischer Zusammenhang" innerhalb eines jeden Wissensgebietes feststellen. „Schreibe ich nun in dem logischen Gebäude einen neuen (in dem logischen Gebäude bisher nicht vorgekommenen) Term oder ein Wort als Zeichen oder Namen eines neuen Begriffes ein und setze fest, daß ich über diesen Begriff die

---

[1]) Es wird vorausgesetzt, daß ein Wissensgebiet in allen seinen Teilen bekannt sei. Aus den Axiomen wird dann ebenfalls ein Wissenszweig entwickelt. Stimmt die gegebene Disziplin mit der axiomatischen Stück für Stück überein, so ist das gegebene Axiomsystem „passend". Der Maßstab ist also die gegebene Wissenschaft, nicht die axiomatische.

[2]) Vgl. DINGLER *Methodik (22)* und die „logischen Voraussetzungen" in *Paradoxieen (23)*.

[3]) Nach DINGLER *Paradoxieen (23)* S. 309.

und die Gruppe von Aussagen mache, so nenne ich diese Gruppe die Definition des neuen Begriffes. In einem logischen Gebäude darf eine Definition nur solche Begriffe und Aussagen enthalten, die schon vorher vorgekommen sind.“ „Läßt sich in einem logischen Gebäude, das auf einem widerspruchslosen Axiomensysteme beruht, aus der Definition eines neuen Begriffes ein Widerspruch ableiten, dann sagen wir: der betreffende Begriff ist widerspruchsvoll, er existiert nicht, ist logisch nicht existent. — Gelingt es, auf irgendeinem Wege nachzuweisen, daß dieser Fall nicht eintreten kann, so sagen wir: der betreffende Begriff ist widerspruchsfrei, er existiert, ist logisch existent. Der Nachweis, daß ein logischer Begriff eines logischen Gebäudes widerspruchslos ist, nennen wir den Existenzbeweis des betreffenden Begriffes.“ — Der Fortschritt in einem logischen Gebäude und sonach in der Mathematik ganz im Allgemeinen besteht sonach im Folgenden: „Es werden neue Begriffe eingeführt, durch irgendwelche Gruppen von Aussagen, die lediglich Begriffe und Beziehungen enthalten, die schon vorher in dem betreffenden logischen Gebäude vorgekommen sind, definiert. Da diese zunächst willkürlich zusammengestellten Aussagen über den Begriff auch widerspruchsvoll sein können, wir aber in einem logischen Gebäude keinen Widerspruch zulassen können, so bedarf jeder so definierte Begriff einer Untersuchung auf seine Widerspruchslosigkeit,“ d. i. eines „Existenzbeweises“.

Wir knüpfen an diese Darlegungen DINGLER'S gleich einige Bemerkungen. Zunächst fällt folgendes auf: Warum wird der Begriff der Definition“ auf neue Begriffe eingeschränkt? Wenn „Definifion“ gleichbedeutend mit „Bestimmen durch eine Gruppe von Aussagen“ ist, so liegt doch kein Grund vor, nicht auch die Axiome als Definitionen der in ihnen verwendeten Grundbegriffe anzusehen.[1]) Es liegt hier unseres Erachtens eine Ver-

[1]) SCHÖNFLIES hat ja, wenngleich nur „sozusagen“, die „Definition“ auch auf diesen Fall ausgedehnt. S. 130 d. A.

mengung von „Definition“, also Bestimmung eines Begriffes (ganz gleichgültig auf welchem Wege) und „Rekursion“, also Zurückführung oder Ableitung eines Begriffes vor.[1]) Was DINGLER beschreibt, würden wir als „Zurückführung auf die Axiome“ bezeichnen — wenn es sich nicht überhaupt um Einführung neuer Axiome handelt, ein Fall, den DINGLER garnicht berücksichtigt zu haben scheint! — Aber hier mag der Sprachgebrauch willkürlich sein.

Eine andere und wichtigere Frage bei dem vorliegenden Sachverhalt ist die: „Wozu der Existenzbeweis?“

Was heißt denn eigentlich, die Axiome sind widerspruchslos? Das kann — auch nach den von DINGLER gegebenen Erklärungen[2]) — nur in dem Sinne aufgefaßt werden, daß folgender Satz immer ausgeschlossen ist: „Auf Grund der Axiome kommt einem aus den Axiomen entnommenen oder aus ihnen abgeleiteten Begriffe A die Eigenschaft B zu und nicht zu.“ Die Forderung nach Widerspruchslosigkeit des Axiomsystems geht dahin, nachzuweisen, daß jede irgendwie erdenkliche Kombination der axiometischen Begriffe und Beziehungen niemals auf einen Satz der gekennzeichneten Art führen kann. Nun ist aber der sogenannte „neue“ Begriff im Grunde genommen garnichts anderes, als eine Kombination aus schon dagewesenen Begriffen und Beziehungen. Denn er ist vermittelst einer

---

[1]) Was hier von DINGLER dargestellt wird, ist die Definition eines Begriffes als Kombination schon früher vorhandener Begriffe. Sie stellt daher nur einen Sonderfall der allgemeinen Definition (Angabe sämtlicher Merkmale) dar, verstößt also in diesem Sinne gegen die Freiheit der widerspruchslosen Definitionsmöglichkeit.

[2]) DINGLER gibt die mit der im Text angegebenen Auffassung wörtlich übereinstimmende Erklärung: „Gelingt es, aus einer Gruppe von Voraussetzungen logisch abzuleiten, daß von einem in ihnen enthaltenen Begriffe eine bestimmte Aussage sowohl gilt, als nicht gilt, so sage ich: Die Gruppe von Voraussetzungen ist widerspruchsvoll, enthält einen Widerspruch.“ (DINGLER *Paradoxieen (23)* S. 308.) Wir haben im Text gleich die Folgerung miteinbezogen, daß die Widerspruchslosigkeit auch für alle abgeleiteten „Begriffe“ gelten solle, eine Folgerung, die sich ja leicht aus dem Gesagten ergibt.

Gruppe von Aussagen, die sich aus „alten" Begriffen und Beziehungen zusammensetzen, definiert. Man kann ihn sonach als eine — unter Umständen allerdings sehr komplizierte — Zusammenstellung der bisher gegebenen Axiome auffassen. Will man diese Folgerung nicht zugeben, so bleibt nichts übrig, als den Aussagen, die den „neuen" Begriff definieren, selbst den Charakter von Axiomen zu erteilen.

Besonders deutlich gehen diese Konsequenzen aus den gemachten Annahmen dann hervor, wenn man sich der DINGLER'schen Vorstellung eines „logischen Gebäudes" bedient. Solch ein logisches Gebäude erscheint in der vorgeschriebenen Begriffsschrift als die Gesamtheit aller Zusammensetzungen der in den Axiomen verwendeten Terme. Manchmal treten für eine besonders häufig vorkommende Anordnung der Terme gewisse abkürzende Symbole ein. Sie entsprechen den durch „eine Gruppe von Aussagen" definierten „neuen" Begriffen. Folgerichtig ausgedacht, müßten sich aber auch diese Symbole vermeiden lassen; wir werden daher kein Recht haben, solche abkürzenden Zeichen als ihrem Sinne nach „neu" zu bezeichnen. Auch sie gehören bei strenger Durchführung der zugrunde liegenden begriffsschriftlichen Vorstellung zur Kategorie der „schon vorgekommenen" Zeichen.

Unter einem Axiom kann man nun bei dieser Auffassung doch nur einen solchen Satz verstehen, der in seiner Begriffsschrift mindestens *einen* (nicht nur scheinbar) *neuen* Term enthält. Eine andere Bestimmung „Axiom" können wir bei Auffassung des Zusammenschlusses eines Wissenschaftsgebietes durch ein logisches Gebäude nicht finden.[1])

So kann man eigentlich die „Definition" nur in zweierlei Sinn nehmen. Sie kann

1. Erklärung für die Abkürzung einer Gruppe von Zeichen durch ein einziges Zeichen sein (Konvention);

---

[1]) Die *Stellung* des logischen Satzes im logischen Gebäude — ob Anfang, Mitte, Ende — kann doch unmöglich über den Charakter als Axiom entscheiden.

2. die Gruppe von Sätzen bedeuten, die ausreichen, die Kombinationsmöglichkeiten eines Zeichens mit anderen vollständig (in jeder logischen Beziehung) darzustellen (Axiom).

Im ersten Fall ist ein Existenzbeweis sinnlos, da die „Existenz" einer Konvention lediglich von dem Willen derer abhängt, die sie setzen und derer, die sie annehmen (so daß also ein so „definierter Begriff" = Abkürzung axiomatischer Symbole stets existiert); im zweiten Fall wird er bereits durchden allgemeinen Nachweis von der Widerspruchslosigkeit der Axiome geführt.[1])

Wir möchten hier noch auf etwas hinweisen, das für die Entwicklung der allgemeinen Axiomatik nicht ohne Wert sein dürfte.

Nimmt man nämlich den „begriffsschriftlichen" Standpunkt ein, so ist nicht recht abzusehen, wie eine Axiomatik der Logik denkbar sein sollte, oder zum mindesten, wie ein Satz als logisches Axiom festgestellt werden könnte.[2]) Denn man müßte ja eben alle logischen Beziehungen bereits kennen (um alle Kombinationsmöglichkeiten festzulegen), mithin das ganze logische Gebäude und seine Grundlage, die Axiomatik, durchschauen, um überhaupt entscheiden zu können, welcher Satz Axiom ist und welcher nicht.

Die Ausführungen DINGLER'S müßten somit unserer Meinung nach dahin abgeändert werden (wenn der grundsätzliche Standpunkt gewahrt bleiben soll): Der Fortschritt in einem logischen Gebäude — und damit auch in der Mathematik — geschieht durch Aufstellung neuer Kombinationen der axiomatischen Grundbegriffe und -beziehungen. Der Unterschied gegenüber DINGLER besteht eigentlich nur darin, daß wir hier „neue Kombination" für „neuer Term" gesetzt haben. Das macht sich nun aber darin bemerkbar,

---

[1]) Es scheint fast, als wäre für DINGLER die Kombinationsmöglichkeit, die die Phantasie und Intuition des Forschers ausmacht, nicht groß genug, um ihm die Reichhaltigkeit der Wissenschaft zu erklären, so daß er „neue" Begriffe einführt.

[2]) Ob DINGLER der Ansicht ist, daß dieses möglich sei, können wir aus den uns vorliegenden Äußerungen nicht feststellen.

daß alle Beweise über Existenz in einen einzigen zusammengedrängt werden: nämlich in den Beweis der Existenz oder (was für DINGLER ja identisch ist) der Widerspruchslosigkeit der Axiome. Dieser ist dann aber auch mit aller Schärfe zu führen.

Der Grund für diese Unstimmigkeiten im Begriffe der Definition und des Existenzbeweises scheint uns im Verkennen des Wesens der Axiomatik, insonderheit des Postulates von der Widerspruchslosigkeit der Axiome zu liegen. Bei DINGLER tritt ja auch tatsächlich ein Beweis dafür, daß dieser Forderung durch das vorgelegte Axiomsystem Genüge getan wird, nicht auf.

Einen Versuch, bis zu den wirklichen Quellen der Erkenntnis von Dingen überhaupt auf axiomatischem Wege vorzudringen, den DINGLER später unternommen hat[1]), wollen wir noch betrachten. In einer Fülle von Axiomen, Definitionen und Sätzen — es wird nicht, wie von HILBERT, eine möglichst geringe Zahl von Axiomen erstrebt — versucht DINGLER, über die „alte Logik" hinauszugehen. Er stellt fest, daß alle Objekte der alten Logik den Charakter der Eindeutigkeit haben müssen. Sonst ist in ihrem Bereiche auch nicht ein Schritt möglich. Trotzdem haben sich vielfach — in der Mathematik, namentlich in der Mengenlehre, wie in der Philosophie — uneindeutige Dinge eingestellt, die die Entwicklungen verwirrten. Auf dem Boden der alten Logik war diesen Gegenständen nicht ohne weiteres beizukommen, wie die Paradoxien der Mengenlehre zeigten. „Der einzig für die alte Logik gangbare Weg war die Zurückführung der uneindeutigen Begriffe auf widerspruchsvolle . ., was ja schließlich immer gelingen muß, aber doch nicht den Kern des Problems trifft."[2]) Auch die Logistik kann hier nichts helfen, da alle ihre Überlegungen nur Übertragungen der alten Logik in eine besonderes ausgewählte Zeichensprache sind. Um also wirklich den Paradoxieen zu Leibe gehen zu können, mußte eine breitere Unterlage

---

[1]) Die folgenden Ausführungen gehen auf DINGLER *Ding (24)*.

[2]) DINGLER *Ding (24)* S. 156.

im allgemeinen Dingbegriff geschaffen werden, als deren Spezialisierung sich das eindeutige Ding erweist.

Die Einzelheiten dieser Axiomatik durchzugehen ist hier nicht der Ort. Wir sehen uns das System nur auf zwei Punkte hin etwas genauer an. Zum ersten betrachten wir die ihm zugrunde liegenden Ansichten. Und zweitens erörtern wir, wieweit es sich als geeignet erweist, den Zahlbegriff oder eine Axiomatik der natürlichen oder sonst irgendwelcher Zahlen zu begründen.[1])

In die erstgenannte Linie der Betrachtung fallen folgende Gedanken:

Wir knüpfen zunächst an die außerordentlich große Zahl der Axiome an. Durch diese Fülle vermehrt sich zweifellos der Eindruck der riesigen Mannigfaltigkeit der aus den Axiomen entspringenden Sätze. Kommt man nun aber an dies Axiomsystem mit der oben entwickelten Anschauung von den Aufgaben der Axiomatik heran — daß man nämlich durch das vorgesetzte System in Stand gesetzt werde, die daraus entspringende Disziplin in ihrer Widerspruchsfreiheit zu überschauen, so wird man die DINGLER'sche Lösung schwerlich als elegant bezeichnen können. Eine Disziplin mit Hilfe von 233 Axiomen, Definitionen und grundlegenden Sätzen zu handhaben, ist sicher keine leichte Aufgabe.

Dazu tritt aber — zunächst allerdings nur das Einarbeiten erschwerend — noch ein Umstand hinzu:

Wenn man sich nämlich in das Axiomsystem hineinzudenken bemüht und hierbei von der alten Logik ausgeht — da ein anderer als der traditionelle Ausgangspunkt nicht angegeben, vielmehr immer einfach von logischem Schließen u. a. die Rede ist (die oben erwähnten Grundgedanken DINGLER'S stehen erst ganz am Ende der Abhandlung verzeichnet) — so merkt man plötzlich, daß man sich auf einem Boden befindet, der der alten Logik

[1]) In dem Sinne, daß sie sich als eine tiefer liegende Axiomschicht für ein (unter Umständen noch zu schaffendes) Axiomsystem der Zahlenlehre erweist.

gar nicht zugänglich sein soll. Denn, wie DINGLER ganz richtig bemerkt, setzt die alte Logik, „Ding“ mit „eindeutigem Ding“ identisch. Man muß also die gesamte Logik über Bord werfen und noch einmal von vorne anfangen.

Wir gehen also, nachdem wir die uns gewohnte Logik „vergessen“ haben, wieder zur DINGLER‘schen „Methodik der Axiome“ zurück. Da treffen wir nun auf folgende Sätze:

„1. Axiome von der Form: „Jedes A hat entweder die Bestimmung E oder Nicht=E (non=E)“ sind nicht so inhaltlos, als sie zunächst erscheinen. Sie legen die Tatsache fest, daß die Dinge A sich durch das Vorhandensein der Bestimmung E oder ihr Nichtvorhandensein unterscheiden können.“[1]) Bedenken wir einmal diesen Satz! Da steht das geheimnisvolle Wort „Tatsache“. Wir sind gewohnt — von der alten Logik her, die unter „Tatsache“ ein in das Ganze unseres Denkens eingeordnetes Etwas versteht — mit besagtem Wort einen festen Sinn zu verbinden, nämlich den der Eindeutigkeit des als Tatsache angeführten Etwas. Da wir aber unsere alte Logik und somit auch diese Gewohnheit vergessen müssen, sind wir gezwungen, auch den Fall zum mindesten in Betracht zu ziehen, daß es mehrdeutige Tatsachen geben könne. Solange wir hierüber nichts Sicheres wissen, verlieren die Axiome von der genannten Form jede eindeutige Bestimmtheit. Das kann uns nicht wundernehmen, da ja zugleich mit der alten Logik auch der Satz vom ausgeschlossenen Dritten verloren gegangen ist, auf den die Bestimmtheit der angegebenen Axiome sich sonst stützen könnte. Nun könnte man auf den Ausweg verfallen, auch die besprochene methodische Anweisung etwa mit unter die Axiome aufzunehmen. Es gäbe dann also ein Axiom: „Axiome von der Form ...“, und man könnte das für die axiomatische Einführung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten auch für uneindeutige Dinge und deren Bestimmungen halten.

Aber auch damit ist nichts gebessert. Vielmehr richtet sich der Angriff gegen das ganze Axiomensystem als solches.

---

1) DINGLER *Ding (24)* S. 138.

Nach Axiom 2 (der DINGLER'schen Zählung) ist nämlich jedes Axiom, da es ja eine Bestimmung darstellt, wieder ein Ding. Damit ist aber ausdrücklich auch die Uneindeutigkeit von Axiomen als Dingen solange zugestanden, als sie nicht ausdrücklich verneint wird. Es kann uneindeutige Dinge geben. Gut! Warum dann nicht auch uneindeutige Axiome?

Daraus folgt freilich: Da alle uneindeutigen Dinge aus der Wissenschaft auszumerzen sind[1]), so auch die uneindeutigen Axiome! Nun gibt aber die vorgelegte Axiomatik zunächst kein Kriterium an die Hand, eindeutige Dinge von uneindeutigen zu unterscheiden. Es ist also auch nicht möglich, festzustellen, ob das gegebene Axiomsystem Wissenschaft ist oder nicht.

Diesen Gedanken wollen wir noch ein wenig präziser fassen. Da jedes Axiom ein Ding ist, da ferner 57 Axiome aufgestellt werden, ehe wir in Satz Nr. 81 (der DINGLER'schen Zählung) den Unterschied zwischen uneindeutig und eindeutig überhaupt erst kennen lernen, so haben wir mindestens 57 Dinge vor uns, von denen wir nicht wissen, ob sie eindeutig sind oder nicht. Die Definition lautet: „Wird eine Bestimmung von einem Dinge nicht fest ausgesagt, so sagen wir, das Ding ist mehrdeutig.“ Diese Definition stützt sich auf den Unterschied zwischen „fest ausgesagt“ und „nicht fest ausgesagt“. Dieser Unterschied ist in einem früherem Axiom (Satz Nr. 79) verankert. Wir wissen also nicht, ob die Unterscheidung von „fest“ und „nichtfest“, folglich auch nicht, ob der Unterschied von „mehrdeutig“ und „eindeutig“, wie wir ihn nachher kennen lernen, selber eindeutig ist. Hierfür wäre also ein „Beweis“ zu erbringen. Der aber kann nicht erbracht werden, da er sich auf die Dinge beziehen würde und solche als Be-

---

1) „Da letzteres (das eindeutige Ding) das einzige ist, mit dem man wirklich konsequent denken und arbeiten kann . . .“ (DINGLER *Ding (24)* S. 156). „Genau so gut, wie wir die widerspruchsvollen Dinge aus unseren wissenschaftlichen Begriffsbildungen ausmerzen, so muß das auch mit den nicht eindeutigen geschehen.“ (DINGLER *Ding (24)* S. 155.)

weismittel verwenden müßte, von denen wir nicht wissen, ob sie eindeutig, mithin beweiskräftig sind. Es gibt dann nur noch den einen Ausweg, kurzerhand zu dekretieren, daß alle Axiome eindeutig sein sollen. Dann ist das Axiomsystem auf der alten Logik basiert oder vielmehr dieser zugänglich. Freilich ist dann nicht recht ersichtlich, wozu vorher der große Umweg über 81 Sätze gemacht wurde. Tut man das nicht, so ist die DINGLER'sche Lehre vom Ding und damit die alte Logik — als ihr Sonderfall — von der Wissenschaft ausgeschlossen. Oder ganz genau ausgedrückt: Wir wissen nicht, ob sie Wissenschaft sein kann.

Der Fehler des Axiomsystems liegt also unseres Erachtens darin, daß entweder die Methodik ihm zugrunde gelegt und dadurch etwas postuliert — nicht axiomatisch eingeführt — wird, von dem wir gar nicht wissen, was es überhaupt bedeutet, nämlich die Eindeutigkeit gewisser Bestimmungen (Axiome genannt). Oder der Fehler ist darin zu suchen, daß aus den beiden ersten Axiomen klipp und klar hervorgeht, daß zunächst gar nicht ausgemacht sein kann, ob die (ersten 57) Axiome eindeutige Bestimmungen darstellen. Im letztgenannten Fall ist die Methodik der Axiome lediglich als eine solche zu betrachten, mit deren Hilfe die Widerspruchsfreiheit der Axiome bewiesen werden soll. Ihr eigentlicher Platz wäre dann allerdings am Ende und nicht am Anfang des Axiomsystems gewesen.

Wir können nicht umhin, für diese Tatsache (das Wort im Sinne der alten Logik gebraucht) als Grund die mangelnde Diskussion des Begriffes Wissenschaft anzusehen. Es scheint uns fast so — ohne daß wir dafür einen genauen Beweis erbringen können — als stünde bei DINGLER, wie bei vielen neueren Logikern, der Gedanke im Hintergrunde, daß „wissenschaftlich" und „richtig" vollkommen identisch mit „widerspruchsfrei" sei. Und doch möchte man gerne eine Begründung des Satzes vom Widerspruch haben, um nachzuweisen, daß man bei seiner Anwendung auch wirklich wissenschaftlich verfahre. Man sucht infolgedessen nach einer vom Satze des Widerspruches unabhängigen wissenschaftlichen Logik, sei es nun,

daß man eine „neue“ Logik geradezu aufstellt, oder nur die alte Logik in neuem Gewande erscheinen läßt. Man kann diese Versuche wohl kaum treffender bezeichnen als solche, die eine wissenschaftliche Unwissenschaft erstreben.

Somit müssen wir feststellen, daß die ganze vorgetragene Axiomatik DINGLER's auf nicht allzu festen Füßen steht.

Sehen wir aber hiervon ab, und erheben wir unsere zweite Frage, ob nämlich dieses Axiomsystem vollständig das Problem der Zahl lösen könne, vollständiger jedenfalls, als es bisher gelungen ist. Auch hierauf müssen wir mit einem „Nein“ antworten. Bis zum Axiom in Satz Nr. 50 (nach DINGLER) läßt sich alles im wesentlichen ohne den berüchtigten Ausdruck „Anderes“ durchführen. Dann aber bei Nr. 52 und 53 versagt diese Möglichkeit. Denn da finden wir: „Ist eine Bestimmung einer anderen gleich, so ist auch die andere der einen gleich.“ und (53): „Ist eine Bestimmung und eine andere (zweite) Bestimmung derselben noch anderen (dritten) Bestimmungen gleich, so ist auch die eine der anderen gleich.“[1]) Man sieht sofort, daß hier die Bestimmung durch zwei und drei nicht mehr zu umgehen ist.

Übrigens lassen die eben angeführten Stellen, wenn man die Grundauffassung DINGLER's bedenkt, daß Bestimmungen (Axiome) Dinge sind, die sonach auch uneindeutig sein können, den sonderbaren Rückschluß zu, daß auch 2 und 3 vielleicht nicht eindeutig sind.

Wie weit sich die Betrachtungen DINGLER's seinen Behauptungen gemäß in der Mathematik als fruchtbar erweisen, können wir hier nicht verfolgen. Für unsere Sonderfrage kommen sie jedenfalls sicherlich nicht weiterhin in Betracht.

Der dritte — von uns nunmehr betrachtete — Versuch, eine Axiomatik der Zahlenlehre aufzustellen, ist der, den HILBERT zu wiederholten Malen unternommen hat. Es liegen hierfür eine Reihe von Ansätzen von ihm vor, über deren gegenseitiges Verhältnis — soviel uns bekannt ist —

[1]) DINGLER *Ding (24)* S. 140.

in der Literatur noch nichts festgestellt ist; — und jeder Ansatz ist bis jetzt ein Torso geblieben. Das erschwert natürlich die Besprechung, und manche unserer Bemerkungen mag deshalb vielleicht nicht ganz das treffen, was HILBERT zu sagen beabsichtigt.

HILBERT's Verdienst ist es, den systematischen Aufbau der Axiomatik betrieben zu haben. Für mehrere mathematische und naturwissenschaftliche Disziplinen sind, teils von HILBERT selbst, teils von anderen fast immer aber in mittelbarem oder unmittelbarem Anschluß an seine ersten grundlegenden Werke, Ansätze und Lösungen der axiomatischen Probleme gebracht worden.[1]) Für die Geometrie liegt der Aufbau in mustergültiger Weise abgeschlossen vor. Abgeschlossen, insofern es gelungen ist, die Widerspruchslosigkeit der geometrischen Axiome einwandfrei nachzuweisen, wenn es gestattet ist, die Arithmetik als widerspruchsfrei anzunehmen. Daher die große Bedeutung, die der axiomatischen Behandlung der Arithmetik zukommt.

Hierfür liegen von HILBERT zwei ihrem Wesen nach verschiedene Lösungsversuche vor, die wir beide berücksichtigen; zu ihnen gesellt sich als dritte Arbeit die programmatische Abhandlung HILBERT's über das axiomatische Denken.[2])

Aus der letzten greifen wir zwei Leitsätze heraus, die für die Diskussion der Bestrebungen der Axiomatik wichtig sind. Da ist zunächst der Satz, den wir bei DINGLER fanden, welcher ihn von HILBERT entlehnt hatte: der Satz von der Tieferlegung der Axiome; und zweitens die damit

[1]) Wir führen als Beispiele nur HILBERT *G. d. Phys. (44)*; MOLLERUP *Mengenbegriff (72)*; SCHIMMACK *Vektoraddition (86)*; LOEWY *Zinstheorie (67)* an. Ob sich bei allen Arbeiten, die den Namen der Axiomatik tragen, der Anspruch, der hierin liegt, immer rechtfertigen läßt, scheint uns fraglich. Man vgl. etwa die Arbeit von LOEWY, die einfach zu postulieren und nicht zu axiomatisieren scheint.

[2]) Wir gehen im nachstehenden von den drei Arbeiten HILBERT's aus: *Zahlbegriff (43)*; *Axiom. Denken (45)*; *Neubegründung (46)*. Andere Arbeiten werden nur gelegentlich herangezogen.

gen verbundene Forderung nach der Möglichkeit, jedes Wissenschaftsgebiet zu axiomatisieren. Beide werden zusammen mit der bekannten HILBERT'schen Forderung der Widerspruchslosigkeit der Axiomsysteme in unseren Besprechungen eine Rolle spielen.[1])

Da sich nun die Widerspruchslosigkeit aller mathematischen und naturwissenschaftlichen Axiomsysteme (mit Ausnahme vielleicht des mengentheoretischen) auf die des Axiomsystems der natürlichen Zahlen zurückführen läßt, so ist eben dieses letztgenannte der Betrachtung zu unterwerfen. Seine Widerspruchslosigkeit kann aber nur auf die der Logik selber gestützt werden; so ergibt sich die Forderung nach der Axiomatisierung der Logik.

Mit der Vollendung dieses Rückbeweises hängen aber noch eine Menge anderer wichtiger Fragen zusammen: „Das Problem der prinzipiellen Lösbarkeit einer jeden mathemathischen Frage, das Problem der nachträglichen Kontrollierbarkeit des Resultates einer mathematischen Untersuchung; ferner die Frage nach einem Kriterium für die Einfachheit eines mathematischen Beweises, die Frage nach dem Verhältnis von Inhaltlichkeit und Formalismus in Mathematik und Logik, und endlich das Problem der Entscheidbarkeit einer mathematischen Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen. Alle solche prinzipiellen Fragen scheinen mir ein wichtiges neu zu erschließendes Forschungsfeld zu bieten, und zur Eroberung dieses Forschungsfeldes müssen wir, — das ist meine Überzeugung — den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand der Untersuchung machen, wie ja der Astronom

---

[1]) Diese und die folgenden Ausführungen beziehen sich auf HILBERT *Axiom. Denken (45)*. — Es sei gestattet, einiges über unsere Darstellung der HILBERT'schen Bemühungen zu machen. Wir werden gelegentlich Kritik üben müssen. Das tun wir aber nur hinsichtlich der philosophischen Grundeinstellung HILBERT's. Die Bedeutung der Axiomatik als solcher und die der HILBERT'schen Prägung insbesondere zu leugnen, liegt uns fern. Wir verweisen im Gegenteil auf viele spätere Ausführungen, in denen die Anerkennung ihrer speziellen Bedeutung, wie sie sie wesentlich von HILBERT erfahren hat, deutlich zum Ausdruck kommt.

die Bewegung seines Standortes berücksichtigen ... muß, und der Philosoph die Vernunft selbst kritisiert."[1])

Wie soll nun das geschehen? Auf die früheren Bemühungen HILBERT's, auch der Arithmetik eine axiomatische Grundlage zu verschaffen, können sich diese Worte schwerlich beziehen.[2])

Denn bei jenen liegt das Interesse der Darstellung ausschließlich in der Betrachtung der Zahlenreihe und deren axiomatischer Behandlung — nicht beim mathematischen Beweis —:

„Wir denken ein System von Dingen, wir nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit a, b, c, ... Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht."[3])

I. Axiome der Verknüpfung.

I, 1 Aus a und b durch „Addition" ein bestimmtes c, so daß

$$a + b = c, \quad c = a + b.$$

I, 2 Aus a und b ein und nur ein x und ein und nur ein y, so daß

$$a + x = b, \quad y + a = b.$$

I, 3 Es gibt eine 0, so daß für jedes a

$$a + 0 = a, \quad 0 + a = a.$$

I, 4 Aus a und b durch andere Art, durch „Multiplikation", ein bestimmtes c, so daß

$$a \cdot b = c, \quad c = a \cdot b.$$

I, 5 Aus a und b (b nicht 0), ein und nur ein x und ein und nur ein y, so daß

$$a \cdot x = b, \quad y \cdot a = b.$$

I, 6 Es gibt eine 1, so daß für jedes a

$$a \cdot 1 = a, \quad 1 \cdot a = a.$$

II. Axiome der Rechnung.

Sind a, b, c Zahlen, so gelten folgende Regeln:

---

[1]) HILBERT *Axiom. Denken (45)* S. 412—415.

[2]) Die folgenden Darlegungen gehen auf HILBERT *Zahlbegriff (43)*.

[3]) HILBERT *Zahlbegriff (43)* S. 181.

II, 1 $a + (b + c) = (a + b) + c$.
II, 2 $a + b = b + a$.
II, 3 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
II, 4 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
II, 5 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Es folgen dann noch (III, 1—III, 4) Axiome der Anordnung und (IV, 1—IV, 2) Axiome der Stetigkeit.[1])

HILBERT war auch der Ansicht, daß durch Angabe dieses Axiomsystemes „die Bedenken, welche gegen die Existenz des Inbegriffes aller reellen Zahlen und unendlicher Mengen überhaupt geltend gemacht worden sind, ... jede Berechtigung verlieren"; denn „unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns demnach nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen reellen Zahlen zu denken, sondern vielmehr... ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch das obige endliche und abgeschlossene System von Axiomen I—IV gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur dann Gültigkeit haben, falls man sie mittels einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen ableiten kann."[2])

Um zunächst auf diesen Punkt einzugehen, so ist nicht recht einzusehen, warum die Bedenken, die gegenüber der Existenz einer unendlichen Menge von reellen Zahlen erhoben worden sind (insofern man unter ihr die Gesamtheit aller reellen Zahlen versteht) dadurch verstummen sollten, daß man an Stelle der „reellen Zahlen" ein axiomatisch gegliedertes System von „Dingen" setzt. Wird die reelle Zahl als ein Ding definiert, das gewissen Axiomen genügt, so ist der Streit doch nur um einen Schritt weiter hinausgeschoben. Das Bedenken erstreckt sich nunmehr auf die Gesamtheit aller möglichen Dinge, die dem vorliegenden Axiomsystem gehorchen. Dieser Versuch, die Widerspruchslosigkeit der Mengenlehre (in gewissen Fällen) auf die der Arithmetik zurückzuführen, bedürfte unserer Ansicht nach noch einer Glättung.

---

[1]) HILBERT *Zahlbegriff (43)* S. 182f.
[2]) HILBERT *Zahlbegriff (43)* S. 184.

Betrachten wir nun aber das Axiomsystem selber. Manche Axiome erweisen sich — wie HILBERT selber ausführt — auf den ersten Blick als voneinander abhängig oder auseinander ableitbar; so z. B. I, 3 von I, 2 und II, 1; I, 6 von I, 4, 5 und II, 3; II, 3 von I, II 2, 4, 5. Für den fehlenden Beweis der Widerspruchslosigkeit und der Vollständigkeit, in dem Sinne, daß das Axiomsystem ausreicht, die gesamte Arithmetik zu begründen, mag die Kürze der Notiz hinreichende Entschuldigung sein. Und doch wäre gerade der letztere sehr zu wünschen gewesen. Wo bleibt z. B. die Potenzierung und deren Umkehrungen? Soll sie als abgekürzte Multiplikation aufgefaßt werden? Warum wurde dann die Multiplikation auf axiomatischem Wege eingeführt, und nicht auch als abgekürzte Addition? Es entspräche doch sicher dem Gedanken der axiomatischen Methode viel mehr, noch eine dritte Verknüpfung etwa (a ; b), einzuführen: Aus a und b auf noch eine andere Art ein und nur ein bestimmtes c, so daß (a ; b) = c; c = (a ; b); zu a und b ein und nur ein x und ein und nur ein y, so daß (a ; x) = b und (y ; a) = b; es gibt ein Ding k, so daß für jedes a: (a ; k) = a und (k ; a) = a ist. Und dann kann man daran gehen, die Axiome der Rechnung zu erweitern, etwa wie folgt: (a ; (b ; c)) = ((a ; b) ; c); (a ; b) = (b ; a); (a ; (a · c)) = (a ; b) · (a ; c) usw..[1]) Das alles sind Fragen, die unbeantwortet bleiben und ein abschließendes Urteil über diesen ersten HILBERT'schen Ansatz unmöglich machen.

Ob sich HILBERT von ihrer Unlösbarkeit überzeugt hat, wissen wir nicht. In seinen letzten Arbeiten über dieses Gebiet hat HILBERT jedenfalls nicht nur äußerlich — in der Wahl des Axiomsystems — eine Modifikation vorgenommen, sondern namentlich auch seinen grundlegenden Standpunkt geändert, wenigstens soviel wir dabei übersehen können.[2])

---

[1]) Es läßt sich allerdings zeigen, daß eine solche Verknüpfung im Bereich der rationalen Zahlen entweder trivial oder widerspruchsvoll ist. Vgl. einen in JARM 155 erscheinenden Aufsatz von mir über den *Aufbau von Zahlverknüpfungen nach Gesetzen.*

[2]) In HILBERT *Neubegründung (46).* An dieses Werk knüpfen die nächsten Untersuchungen an.

Zunächst scheint allerdings auch hier alles beim Alten bleiben zu sollen: „Das Kontinuum der reellen Zahlen ist ein System von Dingen, die durch bestimmte Beziehungen, sogenannte Axiome miteinander verknüpft sind. . . . Begrifflich ist eine reelle Zahl ein Ding unseres Systemes.“[1])

Hierbei tritt also die Frage auf, ob die Eigenschaften des Systems durch die Axiome dargestellt werden oder nicht.

Über diese für die gesamte Axiomatik wichtige Frage müssen wir hier einige Worte einschalten.

Wir betrachten also zunächst die Annahme, daß die Axiome voll und ganz die Eigenschaften der Dinge des Systems bestimmen. Dann würde die oben gemachte Bemerkung HILBERT's über das Kontinuum der reellen Zahlen auch so zu fassen sein: Das Kontinuum der reellen Zahlen ist eine Menge von der Art, daß über die Zugehörigkeit zu ihr als Element danach entschieden wird, ob gewisse Beziehungen, sogenannte Axiome erfüllt werden. — Der Beweis der Widerspruchslosigkeit der Axiome würde dann auf folgenden Satz hinauslaufen: Für alle Elemente, die den gestellten Bedingungen genügen, führen alle Kombinationen und Schlüsse, im Sinne des Axiomsystemes vollzogen, nie zu einem Widerspruche. — Diesen Weg ist HILBERT in den „Grundlagen der Geometrie“ und den oben erwähnten Ausführungen gegangen.

Machen wir nun zweitens die Annahme, daß die Dinge des Systems vor ihrem Eintritt in das Axiomsystem irgendwie anderweitig bestimmt worden sind. Dann bleibt für die weitere Untersuchung nur noch die Möglichkeit, die Axiome als etwas zu betrachten, das die Bestimmung der Elemente fortsetzt. Unter Bestimmung wird hierbei natürlich immer Angabe derjenigen Eigenschaften verstanden, wodurch die bleibenden Unterschiede von Anderem einheitlich festgelegt werden.

Daraus ergeben sich nun für das Feststellen des Axiomsystems zwei Wege. Entweder man führt die Axiome als vollkommen neue, zu den bisherigen Bestimmungen der

---

[1]) HILBERT *Neubegr. (46)* S. 159.

Dinge hinzutretende und von diesen unabhängige Beziehungen ein. Dann ist nachzuweisen, daß die Axiome weder untereinander noch auch mit den alten Bestimmungen der in ihnen verwerteten Dinge einen Widerspruch ergeben. Diesen Tatbestand kann man auch so ausdrücken: Es wird ein regelrechter Existenzbeweis für die Dinge des Systems verlangt; insofern nämlich gefordert wird, daß es Dinge der alten Bestimmungsart gibt, die außerdem noch den neuen Bestimmungen, den Axiomen, genügen.

Man kann aber auch annehmen, daß die Axiome nichts anderes sind, als Beziehungen, die aus den ursprünglich gegebenen Bestimmungen der Dinge abgeleitet worden sind. Hier ist der Beweis ihrer Widerspruchslosigkeit einfach auf einen solchen der alten Bestimmungen zurückzuführen.

Aus dieser letzten Bemerkung ergibt sich, daß die Möglichkeit, die „Dinge des Systems" vor Eintritt in das Axiomsystem vollständig zu erklären, eigentlich nichts anderes ist, als eine verkappte „Tieferlegung der Axiomschicht". Diese Bestimmungen, durch welche die Dinge eines Systems in einen „Grundbereich" — wie wir nach WEYL sagen wollen[1]) — definitorisch zusammengeschlossen werden, sind ja nichts anderes als die Axiome einer Disziplin, die sich auf diesem Grundbereich aufbaut und diesem ihre Objekte entnimmt. (Diese Disziplin kann, wie wir später sehen werden, unter Umständen die Axiomatik selber sein.)

Wenn also „Dinge" einem „Grundbereich" entnommen und dann axiomatisch bearbeitet werden, so ist nachzuweisen, daß ihre ursprünglichen Bestimmungen mit den Axiomen in Einklang stehen, mit anderen Worten: Dinge eines Axiomsystems, wenn sie einem Grundbereich

---

[1]) WEYL hat in seinem *Kontinuum (114)* nicht mit Unrecht die Wichtigkeit des Grundbereiches betont. Wenn wir trotzdem seiner Grundlegung nicht zustimmen können, so liegt das in der abweichenden Stellung, die wir zu dem von ihm so in den Vordergrund geschobenen „es gibt" und seiner Verwendung beim Ausfüllen der Urteile einnehmen. Das ausführlicher darzustellen, ist hier nicht der Ort.

entnommen werden, müssen einen Existenzbeweis durchmachen. Es muß gezeigt werden, daß die in den Axiomen zur Verwendung kommenden Dinge mit solchen des Grundbereiches identisch sind.

Diesen Weg der Bestimmung der in den Axiomen enthaltenen Dinge durch einen Grundbereich ist nun HILBERT in der zweiten Art seiner Begründung der Arithmetik gegangen.

Bevor wir hierzu übergehen, machen wir noch eine Bemerkung zu dem — wie wir sagen wollen — streng axiomatischen Wege, die Dinge eines Systems ausschließlich durch die Axiome bestimmen zu wollen. Die Widerspruchslosigkeit von Axiomen nachweisen, heißt nun nichts anderes, als die Widerspruchslosigkeit von Beziehungen nachweisen. Da nun als Resultat der Beziehung „Axiom", konsequent ausgedacht, nur ein Ding unseres Systems in Frage kommt, — wenigstens in der Arithmetik — so kann das Resultat der Axiomatik nicht die Probe auf das Exempel, nicht die Bestimmung der Beziehung sein. Sonst hätten wir ja eine Eigenschaft des Axioms durch Dinge unseres Systemes bestimmt, anstatt umgekehrt, wie es sein sollte. Daher kann die Widerspruchslosigkeit der Axiome nicht auf eine solche der Resultate zurückgeführt werden. Man müßte vielmehr die Axiome als Beziehungen, als Relationen schlechtweg erörtern. Voraussetzung dieser ganzen Untersuchung wäre sonach eine allgemeine Relationstheorie.[1])

Darunter wäre dann eine Lehre zu verstehen, die alle überhaupt denkbaren Beziehungen darstellte und systematisch durchforschte. Da nun die axiomatische Methode den Anspruch erhebt, für jede exakte Wissenschaft die allein angemessene Methode der Grundlegung zu sein[2]), so müßte

---

[1]) Uns ist bisher nur ein Werk begegnet, in dem ein solcher Rückgang auf eine allgemeine Relationslehre bewußt unternommen wird: GEIGER *Axiomatik (32a)* (vgl. namentlich die programmatischen Äußerungen S. VIII).

[2]) HILBERT *Neubegr. (46)* S. 161: „Die axiomatische Methode ist tatsächlich und bleibt das unserem Geiste angemessene unentbehrliche Hilfsmittel einer jeden exakten Forschung." Vgl. S. 158 Anm. d. A.

man sich folglich an eine Axiomatik der Relationstheorie begeben. Hier wäre dann zugleich der Anfangspunkt für die Axiomatik überhaupt zu suchen. Denn für ein Axiomsystem der allgemeinen Relationstheorie gelten dieselben Überlegungen, wie für jedes andere. Man würde „Dinge“ nehmen, sie „Relationen“ nennen und zwischen ihnen bestimmte Beziehungen (Axiome) festlegen, durch die die Dinge bestimmt würden.

Dieser Weg führt also — wie wir sagen können — zu einem Axiomsystem der Axiomatik. Wir wollen damit keineswegs einen circulus vitiosus behauptet haben; im Gegenteil! Wir glauben im ersten Kapitel dieses Werkes einen Weg zur Aufstellung eines derartig grundlegenden Axiomsystems gezeigt zu haben. Ob sich freilich die dort entwickelten Gedanken in das gewohnte Satzgefüge eines Axiomsystems umgießen lassen, ist noch nicht abzusehen.

Es könnte nunmehr an der Zeit erscheinen, zu erörtern, in welche Gegend uns der zweite Weg führt, der der axiomatischen Methode offen steht. Wir können uns hierbei kürzer fassen und sagen, daß dieselben Schlüsse wie die eben vollzogenen gelten. Nur ist zu berücksichtigen, daß wir hier das „Axiomsystem“ des Grundbereiches zu erörtern haben, und nötigenfalls noch einen Existenzbeweis in oben geschilderter Weise daran knüpfen müssen.

Wir wenden uns nunmehr der Einzelausführung zu, die HILBERT dieser zweitgenannten Richtung der axiomatischen Methode in seiner „Neubegründung der Mathematik“ verliehen hat.

HILBERT verwirft das abstrakte Operieren mit Begriffsumfängen und -inhalten als gänzlich unzulänglich und unsicher. Er stellt diese Verdammung als „communis opinio“ hin, ohne allerdings einen eigentlichen Beweis dafür zu geben. Als Beispiele der bekämpften Richtung werden die Theorieen von DEDEKIND und FREGE angeführt. So sei die Theorie des letztgenannten daran gescheitert, daß er die Begriffsumfänge im Sinne der alten traditionellen Logik unbedenklich als etwas Festes angenommen habe. Leider spricht HILBERT nicht seine eigene Stellung zu diesem

Problem aus, er gibt keine Erklärung, was er unter einem Begriffsumfang oder Begriffsinhalt verstehe. Und doch wäre diese Erörterung sehr interessant und wichtig auch für das von ihm früher angeführte Problem des Verhältnisses von Inhaltlichkeit und Formalismus in Logik und Arithmetik gewesen[1]). So sind wir einstweilen auf ein Raten aus dem Zusammenhang heraus angewiesen, wenn wir feststellen wollen, wie bei HILBERT Logik und Arithmetik in Zusammenhang oder Gegensatz gebracht werden sollen. Die Erörterung dieser Frage wird uns jetzt zu beschäftigen haben.

„Als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und die Betätigung logischer Operationen muß ... schon etwas in der Vorstellung gegeben sein, gewisse außerlogische diskrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind.“ — Es ist leider nicht zu leugnen, daß dieser Satz der scharfen Distinktionen, die den mathematischen Entwicklungen HILBERT's die große Durchsichtigkeit geben, entbehrt. Und solche müssen doch gemacht werden, wenn man vollkommen klar über die Absicht des Autors unterrichtet werden will.

Der zitierte Satz ist nämlich in mehrfachem Sinne deutbar. Er könnte erstens die Ansicht hervorrufen, als handle es sich bei dem nachher zu entwickelnden Axiomsystem lediglich um eine Anwendung logischer Schlüsse, um eine Betätigung logischer Operationen. Mit andern Worten, als werde das ganze Axiomsystem der Logik vorausgesetzt, ehe auch nur ein Schritt unternommen werde. Um dieses zu prüfen, müssen wir einen Blick auf die Anlage des gesamten Werkes, insbesondere auf den Aufbau des Axiomsystems werfen.

Zuerst wird die Zahlentheorie, soweit sie sich mit natürlichen Zahlen beschäftigt, begründet (hierauf werden wir

---

[1]) Unter „Inhalt“ scheint HILBERT etwas zu verstehen, das durch Einsetzen der Zahlen 1 2 3 ... in eine allgemeine Formel entsteht. Ob es gelingen wird, hierbei einen allgemeineren Begriff als den des „mathematischen Inhaltes“ zu entwickeln, scheint fraglich. — Unter „Form“ wird wohl ein allgemeines Gesetz verstanden, ein Sprachgebrauch, mit dem der unsere sich in Einklang bringen läßt.

später noch einzugehen haben). Dann werden, auf die eben erwähnten Entwicklungen der Grundlage der Zahlenlehre sich stützend, drei verschiedene Axiomsysteme der Analysis aufgebaut (zwei vorbereitende und ein abschließendes); von deren erstem wird die Widerpsruchsfreiheit — beispielsweise — nachgewiesen.

Nun treten aber erst in dem abschließenden Axiomsystem Axiome des logischen Schließens auf.[1]) Ob diese Axiome übrigens die logischen Axiome sind, oder nur die für die Grundlegung der Analysis notwendigen und hinreichenden, ist nicht ersichtlich. Ob sie ferner beim Beweise der Widerspruchslosigkeit des ersten oder — dem noch ausstehenden — des letzten Axiomsystemes und wie sie dabei Verwendung finden, kann ebenfalls nicht gesagt werden. Ist es doch überhaupt nicht klar, ob die Beweise, die HILBERT bringt, logische oder außerlogische sind, da nach HILBERT der Beweis eine „Figur" ist, die uns als solche anschaulich vorliegen muß, d. i. also ein außerlogisches Objekt bedeutet.[2]) Daher muß zur restlosen Klarstellung dieser Frage eine Auseinandersetzung von Logik und Anschauung gefordert werden. Es ist fernerhin zu zeigen, mit welchem Recht solche „anschaulich vorliegenden" Beweise für das Denken als bindend erachtet werden, oder ob das Denken überhaupt auszuschalten ist. Diese Fragen müssen wir stellen. Eine Kritik der HILBERT'schen Meinung in diesen Punkten können wir natürlich nur dann geben, wenn wir die Antworten auf die Fragen genau übersehen, das ist heute aber noch unmöglich.

Nun lassen sich aber die oben angeführten Worte HILBERT's (vom „außerlogischen Objekt" S. 156 d. A.) noch anders auffassen. Wir führen zu diesem Zweck die Fortsetzung der gegebenen Stelle an:

„Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen ihren Teilen überblicken lassen, und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung,

---

[1]) HILBERT *Neubegr. (46)* S. 174.

[2]) HILBERT *Neubegr. (46)* S. 169.

ihr Aufeinanderfolgen ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich für uns da, als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt. Indem ich diesen Standpunkt einnehme, sind mir — im genauen Gegensatz zu FREGE und DEDEKIND — die Gegenstände der Zahlentheorie die Zeichen selbst, deren Gestalt unabhängig von Ort und Zeit und von den besonderen Bedingungen der Herstellung des Zeichens sowie von geringfügigen Änderungen in der Ausführung sich von uns allgemein und sicher wiedererkennen läßt. Darin liegt die feste philosophische Einstellung, die ich zur Begründung der reinen Mathematik, wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte: am Anfang — so heißt es hier — war das Zeichen."

Wir können aber nicht umhin, zu erklären, daß es uns fraglich erscheint, ob diese Einstellung wirklich allgemeingültig als philosophische bezeichnet werden könne.

Wir gehen bei Begründung dieser Ansicht allerdings von einem Begriff „Philosophie" aus, der vielleicht HILBERT nicht eigen ist, der aber trotzdem unserer Ansicht nach unvermeidlich ist, wenn man unter Philosophie einerseits eine Theorie, andererseits aber keine Spezialtheorie erblicken will. Wir fassen die Philosophie als die wissenschaftlich begründete Theorie des wissenschaftlichen Beweises überhaupt (vgl. I C § 8 d. A.). Nun stellt aber HILBERT, wie aus den oben angeführten Worten hervorgeht, nicht den Beweis, sondern das Beweisen (nicht den Gedanken, sondern das Denken) in den Mittelpunkt seiner Erörterungen.[1]) Das kann dasselbe bedeuten; wenn nämlich unter „Be-

---

[1]) Vgl. HILBERT *Axiom. Denken (45)* S. 415: „Ich glaube, alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. Durch Vordringen in immer tiefere Schichten von Axiomen gewinnen wir auch in das Wesen des wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewußt. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft

weisen“ eine unbedingt einheitliche Art der Gedankenführung verstanden wird. Es kann dagegen (und das ist das übliche) durch den Ausdruck „das Beweisen“ die Art der Gedankenführung bezeichnet werden, die zur Anwendung des Gedankens der Wissenschaftlichkeit auf ein bestimmtes Gebiet benutzt worden ist. Und hierbei kommt als benutzend nur irgend ein Mensch in Frage, so daß „Beweisen“ kurz mit „durch Menschen ausgeführte Wissenschaftlichkeit“ wiedergegeben werden kann. Geschieht das, so muß jede Untersuchung, die sich lediglich mit „dem Beweisen“ abgibt, in das Spezialgebiet der Psychologie verwiesen werden. Eine solche „Einstellung“ kann daher sehr wohl persönlicher Ausgangspunkt des Forschers sein, aber nicht ein allgemeines „philosophisches“ Beweisprinzip abgeben. Wir können in unserer Terminologie so sprechen: Untersuchungen über den Inhalt des Beweises (den Beweis selbst) sind philosophische, solche über die wahrnehmbare Gestalt des Beweises (das Beweisen) sind psychologische.

Das Eigenartige bei HILBERT ist nun, daß seine Grundauffassung stark zur Psychologie hinneigt, solange es sich nicht um speziell mathematische Gegenstände handelt; sowie aber der Leser bei ihm mathematischen Boden betritt, wird ihm der Inhalt des Beweises als Objekt der Untersuchung zugeführt.

Diese Unstimmigkeit wird noch verstärkt durch zwei Termini, die HILBERT undefiniert verwendet. Der erste ist der der „Anschauung“. Durch die Neubegründung der Mathematik mit Hilfe der „Anschauung“ (und zwar der „konkreten“, mithin auch räumlichen Anschauung) ist das historisch merkwürdige Ergebnis gezeitigt, daß die „Arithmetisierung der Geometrie“[1]) auf dem Umwege

---

überhaupt.“ Uns aber scheint es, als werde erst durch die axiomatische Methode die Mathematik sich ihrer Sonderstellung in dem Gebiete der Wissenschaft recht bewußt werden; sie kann die anderen Wissenschaften führen, aber nicht beherrschen; sie ist die älteste und erfahrenste Schwester, nicht aber die Mutter.

[1]) „Es ist allbekannt, daß wir im Zeitalter der Arithmetisierung leben“, schrieb SCHÖNFLIES 1904 (SCHÖNFLIES *Invarihnten (90)* S. 514).

über die Axiomatik in eine „Geometrisierung der Arithmetik“ ausmündet.

Der zweite, für uns wesentlich interessantere, weil deutlicher umschriebene Terminus ist der des „Zeichens“, soweit es für die Zahlentheorie in Betracht kommt. Dieses Zeichen ist nun mit ungewöhnlichen Eigenschaften belastet. Zunächst einmal gehört es zur Gattung der „außerlogischen, diskreten Objekte“; ferner hat es eine „Gestalt“, und diese Gestalt hat eine Reihe von Eigenschaften, die alle fest wiedererkennbar sein müssen, wenn das Zeichen sich als ein zur Grundlage für die Zahlentheorie geeignetes Etwas herausstellen soll.

Wenn nun das „Wiedererkennen“ nicht auf eine phy iologische Beschaffenheit des wiedererkennenden Subjektes gestützt und damit ein vollendeter Subjektivismus eingeführt werden soll, muß sich ein Etwas finden lassen, das von allen Zufälligkeiten wiedererkennender Individuen frei ist. Bei dieser Auffassung der „Gestalt“ bleiben also nur zwei Möglichkeiten, das Zeichen aufzufassen.

Entweder man nimmt „Zeichen“ als ein unabhängig von jeder Erkenntnis existierendes wahrnehmbares Ding (ein Sonderfall der „Welt der Dinge an sich“), oder — wie wir uns kurz ausdrücken wollen — als eine „Versinnlichung“ eines bestimmten Begriffes. Letzere Deutung ist nun bei Hilbert fast ausgeschlossen. Sonst wäre ja das Zeichen nur unter Zugrundelegung eines Begriffes voll zu erkennen. Dann ist nicht recht zu sehen, warum es in die „außerlogischen, diskreten Objekte“ aufgenommen wird.

Fragen wir überhaupt einmal, was das „außerlogische Objekt“ zu bedeuten habe!

Soll dieser Ausdruck soviel bedeuten, wie, daß ein Gegenstand der Logik und ihren Regeln — mögen sie nun aufgestellt werden, wann, wie und von wem sie wollen — nicht gehorcht? Diese Auffassung, die der Hilbert's sehr nahe zu kommen scheint, birgt nun aber eigenartige Folgerungen in sich. Diese ergeben sich aus der Bemerkung, daß „außerlogischer Gegenstand“ ein von Hilbert durch gewisse Eigenschaften ausgezeichnetes Etwas, mit anderen Worten

ein *definierter Begriff* ist. Eine der Eigenschaften des außerlogischen Objektes ist z. B. die, daß es vor allem Denken als unmittelbares Erlebnis anschaulich vorliegt. — Daher sind alle außerlogischen Objekte, also alle Zeichen, nichts anderes als Besonderheiten eines allgemeinen Begriffes, sozusagen seine „Individualisierungen"; daher verfallen sie der Gültigkeit der logischen Gesetze, sie sind *logische Gegenstände*. Dieses doch recht eigenartige Benehmen der außerlogischen Gegenstände kann einen nicht Wunder nehmen. Gehorchen sie doch nicht den Sätzen der Logik, also auch nicht dem Satze der Identität und dem des Widerspruches[1]).

Es ist ja nun zuzugeben, daß man das Wort „außerlogischer Gegenstand" nicht derart scharf zu nehmen braucht. Man *kann* ja darunter etwa einen Gegenstand verstehen, bei dem *nicht alle Bestandteile allein durch die Logik bestimmbar sind*, wenngleich der Gegenstand als solcher immer den logischen Gesetzen gehorcht. Dann wären alle Gegenstände der Erfahrung — und nur diese — die außerlogischen Gegenstände. Der Satz: Am Anfang ist das Zeichen! würde dann soviel bedeuten, wie der: Daß alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebt, ist gar kein Zweifel. Das ist nun zwar ein an sich richtiger Satz; aber der durch ihn vertretene exklusiv empirische Standpunkt ist sicher nicht ausreichend zur Begründung aller *reinen* Erkenntnis, da der Gedanke der „Wissenschaft" in seiner vollen durchgreifenden Bedeutung nicht erkannt werden kann. Wie soll z. B. hierbei der Mathematik „unanfechtbare Wahrheit" erkämpft werden? Das geht nicht anders, als daß man auf die *ausschließliche* Verwendung des außerlogischen Objektes, in Gestalt des Zeichens, zum mindesten beim *Beweise*, (hier von HILBERT Figur genannt) verzichtet. Vielmehr wird man als

[1]) Die „außerlogischen Objekte" HILBERT's geben daher zu ähnlichen Äußerungen Anlaß, wie die mehrdeutigen Dinge DINGLER's (S. 143ff. d. A.). Nur laufen bei ersteren die Folgerungen entgegengesetzt, wie bei letzteren, da ja HILBERT auf dem Boden der alten Logik bleibt.

Gegenstand einer Untersuchung über die Grundlagen der Mathematik, also der Untersuchung, die die untrügliche Gewißheit dieser Wissenschaft erweisen soll, das nehmen müssen, was man als das „logische Rückgrat“ der Zeichen ansehen kann, den ihnen zu Grunde liegenden Begriff.

Als so Etwas, was die logische Konsistenz der „Zeichen“ in gewissem Sinne ausmachen könnte, kommt nun nach den Worten HILBERT's die „Gestalt“ in Frage. Sie stellt ja die Gesamtheit dessen dar, was unabhängig von den subjektiven Bedingungen der psychologischen Auffassung des Gegenstandes ist; sie ist in der Tat dasjenige, was man den „Begriff“ des betreffenden Gegenstandes zu nennen gewohnt ist. Allerdings ist das ein nicht üblicher Sprachgebrauch, das Wort „Gestalt“ in diesem Sinne aufzustellen; aber die Freiheit des Sprachgebrauches muß jedermann, und erst recht HILBERT, zugestanden werden.

Wie man nun aber auch das Zeichen als außerlogischen Gegenstand auffassen mag, schwierig bleibt immer die Erklärung dessen, was unter einem „logischen Zeichen“ zu verstehen sei.[1]) Selbst dann nicht, wenn man es gutheißen wollte, daß „zur Anwendung und Betätigung logischer Operationen“ außerhalb der Logik außerlogische Gegenstände gefordert und für sie (die „Zeichen“) neue — von der Logik nur mittelbar abhängige — Methoden ersonnen werden, mit deren Hilfe man dann neue Disziplinen aufbaut (wie etwa die reine Mathematik). Selbst dann ist keinesfalls recht zu verstehen, was das Zeichen — im HILBERT'schen Sinne, als Sonderfall des „außerlogischen Gegenstandes“ — in der Logik zu suchen habe.

Endlich sollen, um diese Kritik zu Ende zu führen, die Zeichen nicht nur außerlogische, sondern sogar „außerlogische, diskrete Objekte“ sein. Gegensatz hierzu wären

---

[1]) Die Existenz eines solchen Zeichens, nämlich „$\rightarrow$“ wird aber S. 166 ausdrücklich gefordert. In den *Logischen Grundlagen* (*47*) führt HILBERT übrigens noch ein anderes Zeichen, die Negation „$\overline{}$“, ein. — Es scheint fast, als gehe HILBERT hier wieder auf die alten „rein axiomatischen“ Wege zurück. Eine abschließende Beweisführung ist auch in den *Logischen Grundlagen* (47) nicht enthalten.

dann die „außerlogischen, stetigen Objekte". Will man also mit „diskret" einen bestimmten Sinn verbinden, so muß man die sämtlichen diffizilen Untersuchungen der Analysis über den Gegensatz von „diskret" und „stetig" (oder „kontuinierlich") als bekannt voraussetzen. Und zu deren Begründung sollten wir doch erst geführt werden! Oder sollte etwa anzunehmen sein, daß zwar das „Diskretsein" unmittelbar anschaulich, das „Stetigsein" aber nur vermittels der „raffinierten" Methoden der Analysis zu erfassen wäre?

Überblicken wir diese Kritik des HILBERT'schen Standpunktes, so ist folgendes zu sagen: Die „Einstellung" ist entweder psychologisch, dann wird sie im Verlaufe der Theorie aufgegeben; oder sie ist als allgemein philosophische zu bezeichnen, dann kann sie unmöglich als unzweideutig und „fest" betrachtet werden. Denn der grundlegende Gedanke des „Zeichens", als eines „außerlogischen, diskreten Objektes" mit einer von allen Subjektivitäten freien „Gestalt" ist schon an sich dunkel, führt aber durch die Einführung von „logischen Zeichen" zu unbeherrschbaren Komplikationen.

Gehen wir mit HILBERT einen Schritt weiter. „Wir wenden uns nunmehr mit dieser philosophischen Einstellung der elementaren Zahlenlehre zu und überlegen, ob und wieweit auf dieser rein anschaulichen Basis der konkreten Zeichen die Wissenschaft der Zahlentheorie zustande kommen würde. Wir beginnen also mit folgenden Erklärungen der Zahlen:

Das Zeichen 1 ist eine Zahl.

Ein Zeichen, das mit 1 beginnt, und mit 1 endigt, so daß dazwischen auf 1 immer + und auf + immer 1 folgt, ist ebenfalls eine Zahl, z. B. die Zeichen

$$1+1$$
$$1+1+1."[1]$$

Wir halten hier zunächst inne.

Frage: Ist wirklich 1 eine Zahl? Diese Frage wäre vollkommen überflüssig, wenn wir ein Axiomsystem mit

---

[1]) HILBERT *Neubegr. (46)* S. 163.

ausschließlichem Bestimmungsrecht über die in ihm verwendeten Gebilde hätten. HILBERT aber entnimmt seine „Dinge“ hier einem bestimmten Grundbereich, nämlich dem der Zeichen mit einer gewissen Gestalt. Daher die Möglichkeit und Berechtigung der Frage: Ist 1 eine Zahl? Welches ist eigentlich die „Gestalt“ von „1“? Antwort? —— fehlt. Man kann doch unmöglich, wie jener indische Mathematiker sagen, der unter eine Figur, die — wie wir sagen würden — den Satz des PYTHAGORAS beweisen sollte, das eine Wörtchen setzte: Sieh! Vielmehr wird ein „Beweis“ in irgendwelchem Sinne des Wortes nicht zu umgehen sein,

Oder sollen die Worte „Das Zeichen 1 ist eine Zahl“ eine diktatorische Verfügung darstellen, kraft deren dem Zeichen 1 eine von Ort und Zeit usw. unabhängig wiedererkennbare Gestalt zuerteilt wird? Ja, wenn es sich um Dinge handelte, deren Erschaffung in unserer subjektiven Willkür läge, dann könnte solch eine Verfügung akzeptiert werden. Aber die Zeichen, und somit auch das Zeichen 1, sind ja „außerlogische Objekte“, „die als unmittelbares Erlebnis da sind.“ Unsere Verfügungen haben auf ihre Gestalt also keinerlei Einfluß. Wir können die Gestalt bestenfalls wiedererkennen und beschreiben, nicht aber irgendwie schaffen. Es muß daher auf einem Identitätsnachweis bestanden werden. Dieser wäre etwa so zu denken: Das Zeichen „1“ hat „die und die“ Gestalt; es zeigen sich also hierbei die für eine „Zahl“ verlangten Eigenschaften. — Tun wir das nicht, so lassen wir dem Zweifel Tür und Tor offen; wir sind auf freundliche Zustimmung angewiesen, wo unbedingte Sicherheit erstrebt wurde.

Und es stünde dann jedermann frei: „Nein“ zu sagen, ohne daß er in seiner Gedankenwelt ein Chaos vor sich hätte.

Es wäre vielleicht nicht so dringend ein derartiger Nachweis zu verlangen, wenn die „Gestalt“ einer Zahl, etwas Einfaches wäre. Das ist sie nun aber keineswegs, sondern im Gegenteil etwas recht Kompliziertes. Da sie von Ort und Zeit usw. unabhängig stets wiedererkennbar

sein soll, so hat sich also der geforderte und notwendige Beweis in der Richtung zu bewegen, daß nachgewiesen wird, daß dem „Zeichen“ 1 etwas anhaftet, was die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt. Dieser Beweis fehlt nun bei HILBERT.

Es ist auch nicht einzusehen, wie er erbracht werden könnte, ohne daß die Gestalt entweder als metaphysisches Ding an sich oder als logisches Rückgrat einer Erscheinung genommen würde. Diese Bemerkung wird nach den obigen Erörterungen über das außerlogische Objekt keiner weiteren Ausführung mehr bedürfen. Wir ziehen hier nur die eine Folgerung, daß im ersten Falle nicht recht einzusehen ist, wie überhaupt eine Gestalt stets in gleicher Weise wiedererkennbar sein muß, da die Bedingungen für ihre Erkennbarkeit uns nicht zugänglich sind.

Im zweiten Fall, der sonach allein als Ausweg übrig bleibt, wenn die HILBERT'schen Grundlagen angenommen werden sollen, ist eine begriffliche Untersuchung unumgänglich notwendig. Damit sind wir aber auch wieder auf unser altes Problem zurückgekommen, dasselbe, mit dem wir in die Besprechung der HILBERT'schen Axiomatik eintraten, den Begriff des „Anderen“ in den Grundlagen der reinen Mathematik aufzusuchen.

Und nun zeigt sich, daß auch hier bei HILBERT dieser Begriff vorausgesetzt wird, denn es tritt ja neben dem Zeichen „1“ noch das „andere“ Zeichen „+“ auf.[1]

---

[1] Es scheint nicht wohl möglich, in der Zahlenreihe nur mit einem Zeichen, etwa „ · “ auszukommen. Denn die Definition würde alsdann so lauten: „Das Zeichen · ist eine Zahl. Jedes Zeichen, das mit · beginnt und mit · endigt, und bei dem zwischen · und · immer wieder · steht, ist ebenfalls eine Zahl.“ Dann wäre z. B. die Menge der Punkte, die wir, nach vollendeter Begründung der Rationalzahlen, als „rationale Punkte des Intervalles 0 bis 1 einer Strecke einschließlich der Endpunkte“ bezeichnen, ebenfalls eine Zahl der elementaren Zahlenlehre (nicht etwa eine transfinite!), und das ist doch sicher nicht richtig. Eine solche Benutzung nur eines Zeichens ist von BERNAYS zugelassen worden. (BERNAYS, Paul: *Erwiderung auf die Note des Herrn Aloys Müller „Über Zeichen als Zahlen“*. MA 90 1923 S. 159—163.) (S. 160.) Sieht man aber genauer zu, so ist nicht nur das Zeichen „ · “, sondern auch noch das

Auf einer Analyse dieses Begriffes beruht sonach die Möglichkeit, in den Gedankenkreis der HILBERT'schen Axiomatik einzudringen. Es wird sich fernerhin auch als zweckmäßig erweisen, in die Zusammensetzung des Grundbereiches einzutreten, den HILBERT seinen Untersuchungen zugrunde legt, und aus dem er dann die Elemente entnimmt, die den Aufbau der Zahlenlehre herbeiführen sollen.

Wir möchten somit die Kritik dieser letzten Voraussetzungen der HILBERT'schen Neubegründung der Mathematik, wie folgt, zusammenfassen: HILBERT definiert die der elementaren Zahlenlehre zugrunde liegenden Gegenstände nicht axiomatisch, er entnimmt sie einem Grundbereich, der vor aller Axiomatik definitorisch festgelegt ist. Die Auffassung dieses Grundbereiches, so wie sie HILBERT vertritt, ist bei Festhalten des Wortlautes widerspruchsvoll; es zeigen sich zum mindesten schwer zu behebende Unstimmigkeiten.[1]) Will man diese vermeiden, so muß in eine Diskussion des Zahlbegriffes eingetreten werden. Und zwar wird hauptsächlich der Begriff des „Anderen" zu erörtern sein, der als alle mathematische Wissenschaftlichkeit notwendig bestimmender Gedanke erkannt ist; er muß darum vor allen Dingen in einen unbedingt einheitlichen Plan unserer Erkenntnis eingefügt werden.

Zeichen „ " (Zwischenraum zwischen zwei Punkten) gebraucht. Es tritt hier die schon oben bei HILBERT erwähnte Schwierigkeit des „Diskretseins" der Zeichen auf. Der Zwischenraum ist nämlich nötig, damit nicht etwa eine bestimmte Strecke als Menge aller ihrer Punkte aufgefaßt, eine Zahl darstelle, die die Mächtigkeit des Kontinuums hätte und in der elementaren Zahlenlehre ganz sicher nichts zu suchen hat. — Die Frage, wieweit der Zwischenraum als Zeichen in Betracht kommt, wird dann nötig, wenn es sich darum handelt, ob $1 + 1$ ein Bestandteil von $1 + 1 + 1$ ist, oder nicht, ob also 2 größer oder kleiner oder gleich 3 ist. BERNAYS scheint in dem oben erwähnten Aufsatz allerdings der Meinung zu sein, daß das Spatium zu den „nebensächlichen Bedingungen der Herstellung des Zeichens" gehöre; ein Kriterium für Nebensächlichkeiten aber wird nicht angegeben.

[1]) Es ist daher abzuwarten, ob die versprochene zweite Mitteilung die angegebenen „philosophischen" Unstimmigkeiten beseitigt.

Wenn die HILBERT'sche Axiomatik auf diese Grundlage gestellt wird — was in ihrem inneren Aufbau später kaum Veränderungen nach sich ziehen kann — so erscheint sie uns unangreifbar zu sein und eine vollständige Lösung des Problemes zu geben, das sie sich gesteckt hat: den gegenwärtigen Besitzstand der Analysis als Wissenschaft in vollem Umfange darzutun.

Dazu muß freilich noch die Vollständigkeit und Fehlerlosigkeit der einstweilen ausstehenden Beweise verlangt werden.

Die Auffassung des „Zeichens" darzulegen, wie sie uns als geeignet erscheint, den letzten Untersuchungen auch philosophischerseits eine feste unangreifbare Stellung zu verschaffen, das soll nun die Aufgabe des nächsten Kapitels sein.

III. Kapitel.

Der Zahlbegriff.

A. Synthesis.

§ 19. Rückblick und Ausblick.

Wir halten hier zunächst noch einmal inne, um die bisher durchmessene Bahn zu überblicken und zu sehen, in welche Wege wir weiterhin einbiegen müssen.

Werfen wir noch einmal einen Rückblick auf die erzielten Ergebnisse. Die Besprechungen des zweiten Teiles wurden, je mehr sie sich dem Ende zunäherten, um so mehr schon in allgemeine Bahnen gelenkt, die geradezu bereits einer erkenntnistheoretischen Erörterung gleichzusetzen sind. Wenn man die Entwicklung übersieht, wird man gewahr werden, wie sich von Anfang an eine bestimmte Tendenz fühlbar macht. Um sie herauszuheben, fassen wir noch einmal die Resultate hier zusammen:

Wir sind bei der Untersuchung des Zahlbegriffes von der Forderung ausgegangen, einen möglichst allgemeinen Überblick zu gewinnen. Infolgedessen haben wir uns nicht etwa mit einer Analyse der natürlichen Zahlen begnügt — da sich sonst am Ende hätte herausstellen können, daß mit diesen Zahlen längst noch nicht alles getan sei. Wir haben sogar die allgemeinsten komplexen Zahlen mit in den Bannkreis unserer Erörterungen gezogen. Nun ließ sich nachweisen, daß zunächst einmal die ganze Arithmetik wirklich Neuheiten nur noch beim Übergang von den reellen zu den komplexen Zahlen mit zwei Haupteinheiten bietet. Ferner wurde durch die Definition der gemeinen komplexen

Zahlen als Paare reeller Zahlen der Begriff dieser komplexen Zahlen als eine Kombination von Begriffsbestandteilen der reellen Zahlen erkannt. Damit war der Bereich der komplexen Zahlen seinem Begriffe nach auf den der reellen Zahlen zurückgeführt, natürlich nicht in Hinsicht der mathematischen Ergebnisse.

Es gelang fernerhin, den Bereich der reellen Zahlen ganz auf den der rationalen Zahlen zu stützen, und diese wieder auf die natürliche Zahl zurückzuführen.

Und nun traten wir in die Diskussion dieses Begriffes ein: wir betrachteten die verschiedenen Versuche, über ihn Klarheit zu verschaffen.

Bei jedem von ihnen — soweit er uns überhaupt gangbar erschien — stand am Ende als ein noch ungeklärtes Wort das „Eins und nochmals Eins". Da der eine Weg, die Zahlen auf wahrnehmbare Dinge zurückzuführen, abgewiesen werden mußte, blieb auf der einen Seite noch die Diskussion des Begriffes der „Menge", auf der anderen Seite die Erörterung über eine gewisse Auffassung des „Zeichens" übrig. Zu beiden gesellte sich als noch zu sichernder Begriff der des „Anderen". Wir sehen somit zur Zeit zwei Möglichkeiten vor uns, den Zahlbegriff aufzustellen und einem philosophischen Standpunkte einzuverleiben.

Es wäre nun sicherlich sehr interessant, beide Wege zu gehen, um zu untersuchen, wann sie sich treffen. Man könnte das sogar gewissermaßen als die Probe auf das Exempel der Ableitungen betrachten.

Indessen gehen wir hier bloß die eine Aufbaumöglichkeit durch, die sich mit den axiomatischen Gedankengängen beschäftigen soll. Mit anderen Worten: Wir wollen versuchen, den Zahlbegriff durch eine Einfügung der beiden Begriffe „das Andere" und „das Zeichen" in das Ganze der Erkenntnis nach fester systematischer Erwägung „philosophisch" sicherzustellen.

Dazu werden folgende einleitende Bemerkungen gute Dienste leisten.

Wenn man — wie das bei unseren Untersuchungen der Fall ist — einen Komplex von Gegenständen vor sich

hat (die verschiedenen Zahlen), und den Begriff feststellen soll, unter den sie fallen (den Begriff „Zahl"), so ist ein solcher Begriff zweifellos in dem gegeben, was ihnen allen an Merkmalen gemeinsam ist.

Allein eine solche Erwägung kann für ein durchgreifendes systematisches Denken nicht als abschließend in Frage kommen. Denn dadurch, daß wir die Gesamtheit der Merkmale eines bestimmten Komplexes K festgestellt haben, ist nicht gesagt, daß wir den gesuchten Begriff haben. Dieser gesuchte Begriff ist zwar sicher Oberbegriff von K, ebenso wie der aufgestellte. Daß sie aber beide miteinander identisch sind, vermag die bloße Analyse von K nicht zu zeigen, auch nicht etwa nur eine Analyse des gefundenen Begriffes. Es wird vielmehr nötig sein, als systematischen Abschluß der Untersuchung anders als ausschließlich analytisch vorzugehen.

Daher würde man die Aufgabe falsch verstehen, die uns vorschwebt, wenn man meinen würde, daß sie ausschließlich durch das Aufsuchen eines den verschiedenen Zahlgattungen gemeinsamen Begriffes gekennzeichnet sei. Das ließe sich nämlich auf rein analysierendem Wege feststellen.

Danach ist unser Ziel nicht eine Analyse, sondern eine Synthese des Zahlbegriffes. Andernfalls hätten wir uns mit dem Resultat des zweiten Kapitels vollkommen begnügen können.

Eine derart synthetisch gehaltene Erörterung bedeutet sonach nichts anderes, als daß die Frage aufgenommen wird: Unter welchen Begriff müssen wir alle bisherigen Besprechungen im II. Kapitel zusammenfassen, um ihnen die für eine wissenschaftliche Betrachtung notwendige Einheit zu geben?

Wir bemerken hier nochmals, um den Begriff der Wissenschaft mit voller Klarheit in die Erinnerung zurückzurufen, folgendes: Es kommt uns bei unserer erkenntnistheoretischen Untersuchung nicht so, wie es die Axiomatik sich als Ziel setzt, auf Geschlossenheit der Disziplin in sich an. Diese wird vielmehr als möglich voraus-

gesetzt. Wir erstreben hier vielmehr einen einheitlichen Zusammenhang mit dem Ganzen der Erkenntnis.

Wenn also die Frage hiernach zu beantworten ist, so ist damit eine Umkehrung der Richtung der Untersuchung zur bisherigen geboten.

Es wird nämlich nötig, die Erörterung nicht von unten her, von dem zu bestimmenden Komplex der Gedanken aus vorzunehmen, sondern sie von dem alles beherrschenden Gesichtspunkt der Wissenschaft aus zu führen. Es ist wie der Bau eine Tunnels von zwei Seiten, bei dem die Schwierigkeit darin liegt, daß man sich in der Mitte wirklich begegnet. Es handelt sich also jetzt darum, zu dem bisher Erworbenen eine Möglichkeit der systematischen Einordnung von ihm in das Ganze der Erkenntnis zu finden.

Zu diesem Zweck knüpfen wir an eine frühere Bemerkung (§ 18 S. 155 d. A.) an: Die Gedanken des ersten Kapitels als eine Art axiomatischer Fundamentierung zu betrachten, die jeder Relationstheorie und somit auch jeder Einzelaxiomatik zugrunde gelegt werden können. Wir können diesen Satz aussprechen, ohne einen Zirkel zu begehen, da ja tatsächlich der Komplex der dort vorgelegten Erörterungen, wie in § 3 und 8 gezeigt wurde, seine Begründung in sich selber tragen kann und muß. Hier ist es tatsächlich am Platze, von der Abgeschlossenheit der zu axiomatisierenden Disziplin in sich auszugehen, da wir als diese „Disziplin“ die Gesamtheit aller Erkenntnis gewählt haben. Deren Axiomatik, die dann den Begriff Wissenschaft ausmacht, ist als Grundlage auch der synthetischen Untersuchung wohl geeignet, ja sogar die einzig mögliche.

Wir haben nun bei den obigen Besprechungen (in Kapitel II) zuletzt immer gefragt: zeigt sich in dem betreffenden System der Begriff des „Anderen“ axiomatisch eingeführt, oder wird er einfach vorausgesetzt? Es ist nicht mehr als recht und billig, daß wir diese Frage auch an unsere eigenen Erwägungen richten. Dadurch erreichen wir das oben bezeichnete Zeil des noch restierenden einheitlichen Einbaus der Resultate von Kapitel II in eine philosophische

Grundauffassung. Gelingt es nämlich, den Begriff des „Anderen“ auf Grund unserer Voraussetzungen so zu bestimmen, daß er nicht als methodische Voraussetzung unserer grundlegenden Erwägungen erscheint, so haben wir diese Aufgabe erfüllt.

§ 20. Das Andere.

Wo also findet sich der Begriff des Anderen in unseren Grundlagen? Wenn wir uns daraufhin die Gedankengänge des I. Kapitels ansehen, so bemerken wir, daß er sich sehr früh einstellt. Das war nach den Ergebnissen der mathematischen Analyse der letzten Voraussetzungen auch kaum anders zu erwarten, da selbst derartig grundlegende und allgemeine Untersuchungen, wie die von DINGLER und HILBERT ihn schon voraussetzten.

Es zeigt sich nämlich, daß es nötig wird, ein „Anderes“ vorauszusetzen, sowie der Gedanke der Wissenschaft als solcher festgestellt ist, und es sich dann darum handelt, ihn als besonderen, vereinzelten Gedanken in das Ganze einzufügen. Denn es war notwendig, „Wissenschaft“ in diesem Beweis im Gegensatz zu einem anderen Gedanken — dem der Unwissenschaftlichkeit — zu nehmen.

Mit anderen Worten: Am Anfang jeder Deduktionsmöglichkeit steht der Begriff des „Anderen“, jener für den Zahlbegriff als unentbehrlich nachgewiesene Gedanke.

Wir hatten schon oben erwähnt, daß dies nach dem Resultat des II. Kapitels zu erwarten war, und hatten bereits an den betreffenden Stellen auf die Notwendigkeit hingewiesen, den Begriff der Wissenschaft selbst an die Spitze der Untersuchung zu ziehen. Und es wird nunmehr auch der tiefere Grund des Mißlingens der genannten Versuche — wenn sie wirklich darauf ausgingen, ab ovo zu deduzieren — hier bloßgelegt. Dadurch, daß alle von uns erwogenen Versuche in selbstverständlicher Weise den Gedanken der Wissenschaft und die Möglichkeit, mit seiner Hilfe Schlüsse zu ziehen, also die Möglichkeit wissen-

schaftlicher Beweisführung überhaupt voraussetzten, mußten sie ebenso selbstverständlich von Anfang an „das Andere“ mit aufnehmen. Und das machte sich dann an irgendeiner Stelle und auch hier meist recht früh bemerkbar.

Wollen wir daher diesen Fehler nicht begehen, so gilt es den eben angedeuteten Gedanken noch weiterhin au - zubauen, um ganz klar die Stelle zu erkennen, an der der Begriff des „Anderen“ in die Diskussion eintreten muß.

Zunächst sei uns noch ein Beispiel gestattet. Durchmustern wir nämlich die verschiedenen Wissenschaften, so finden wir, daß sie alle mehr oder minder mit *logischen* Hilfsmitteln arbeiten. Die Frage, in welchem Maße das bei den einzelnen Disziplinen geschieht, kommt hier nicht weiter in Betracht; es ist nur die Tatsache des „daß“ festzustellen. Und nun überblicken wir die Logik selber einmal. Da steht an ihrem Anfang der Satz der Identität: Jeder Gedanke ist mit sich selbst identisch. — Auch hier lassen wir wieder die Frage nach der *Größe* seines Einflusses in den logischen Erörterungen unbeachtet. Sicher ist, daß zum mindesten ein sehr wichtiger Teil aller Betrachtungen von ihm abhängt.

Gehen wir jetzt daran, die Wissenschaftlichkeit des Identitätssatzes und damit der von ihm abhängigen Sätze zu prüfen! Dieser Frage läßt sich folgende pikante Gestalt geben: Bezeichnet man eine jede Logik, in der der Identitätssatz auftritt, durch das Schlagwort „Aristotelische Logik“, so ist die eben gestellte Frage gleichbedeutend mit der Frage: *Gibt es eine wissenschaftliche Nicht-Aristotelische Logik?*

Wollte man diese Frage bejahen, so hieße das nichts anderes, als die Behauptung aufstellen, daß der Identitätssatz unrichtig sei. Denn ohne irgendwie den Identitätssatz erledigt zu haben, kann keine logische Betrachtung stattfinden, da man wissen muß, wie ein Begriff, z. B. der der Identität, in einer Untersuchung, z. B. über den Begriff der Identität, behandelt werden muß; etwa ob man aus ihm stets dieselben Schlüsse ziehen darf, oder ob das nicht der Fall sein soll. Es muß daher jede Nicht-Aristotelische Logik

die Behauptung enthalten, daß der Satz der Identität falsch sei.

Nun ist aber sofort einzusehen, daß mit dieser Behauptung der Unterschied zwischen wissenschaftlich und unwissenschaftlich aufgehoben worden ist Denn wenn die Behauptung gelten (= wahr sein) soll: „es ist falsch, daß jeder Begriff mit sich selbst identisch ist“, so erhält man durch Anwendung den Satz: Es ist falsch, daß „wissenschaftlich“ mit sich selbst identisch ist. Bedeutet das nun soviel, als die Möglichkeit annehmen, daß auch ein als wissenschaftlich erkannter Satz plötzlich einmal falsch sein könnte[1]), so ist die Unwissenschaftlichkeit einer „Nicht-Aristotelischen Logik“ erwiesen.

Betrachten wir nun diesen Beweis genauer, so sehen wir, daß auch hier eine ähnliche Situation vorliegt, wie wir sie früher bei gleichlaufenden Schlüssen vorgefunden haben. Wir richten aber unser Augenmerk jetzt auf den Punkt, daß hier ein Satz als wissenschaftlich erwiesen worden ist dadurch, daß ihm *ein anderer Satz* gegenübergestellt werden konnte. Auf diese Gegenüberstellung gründete sich der Beweis.

So gewinnen wir den Satz: *Der Begriff des „Anderen“ ist die Voraussetzung dafür, daß ein besonderer Satz als wissenschaftlich erkannt wird.*

In diesem Satz ist nun zweierlei enthalten: Zum ersten kommt in ihm die Verschiedenheit der *mathematischen* und der *erkenntnistheoretischen* Art der Betrachtung zum Ausdruck, und zweitens ist hier zugleich der Ansatzpunkt für die Entwicklung eines allgemeinen Zahlbegriffes gegeben.

Zu dem Erstgenannten, dem Unterschied zwischen Erkenntnistheorie und Mathematik hinsichtlich ihrer Methodik ist nun folgendes zu bemerken.

---

[1]) Hier wird nur diejenige Nicht-Aristotelische Logik abgetan, die aus a $\neq$ a den Schluß zieht: Es *muß* gelegentlich a $\equiv$ non = a werden.

Immer wieder, wenn wir eine Erkenntnis in ihrem Zusammenhang mit dem Ganzen des Geisteslebens prüfen wollen, also jedesmal bei einer Untersuchung über ihre Richtigkeit, müssen wir sie als eine für sich gesonderte betrachten. Sie aus dieser Sonderung durch systematische Angabe der sie bedingenden Gedanken zu befreien, ist Aufgabe der Erkenntnistheorie.

Dagegen wird sie in ihrer Besonderheit belassen und nur anderem Besonderen gegenübergestellt durch die Mathematik.

Es ist, von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet, die grundsätzliche Verschiedenheit beider Wissenszweige, wie folgt, festzulegen: In der Erkenntnistheorie sind Gegenstand und Methode inhaltlich verschieden, in der Mathematik nicht. Der methodische Leitfaden, jeder einzelnen erkenntnistheoretischen Untersuchung ist der Gedanke der Wissenschaft. Ihm steht das Betrachtete als irgendein Besonderes in inhaltlicher Verschiedenheit gegenüber. Als einzige Ausnahme, wenn man so will, kommt hier der Begriff „Wissenschaft" und die Untersuchung seiner Wissenschaftlichkeit in Betracht.

Im Unterschied hiervon geht die zahlenmäßige Betrachtung so vor, daß in der reinen Zahlenlehre sowohl Gegenstand wie Methode besondere Fälle des Zahlbegriffes sind. Sie werden aufeinander angewendet und liefern in dieser Art der inhaltlichen Gleichstellung bei erkenntnistheoretisch zu beachtender Verschiedenheit das Gebäude der Zahlenlehre.

Gehen wir diesem Gedanken nun noch etwas nach, so erhalten wir zugleich den gewünschten Einblick in den Aufbau des allgemeinen Zahlbegriffes. Bisher ist der eben angegebene methodische Unterschied ohne weiteres ersichtlich, sowie es sich ausschließlich um den Begriff des „Anderen" handelt.

Inwiefern sich aber aus dieser Gedankenreihe ein allgemeiner Zahlbegriff entwickeln läßt, wird nunmehr zu erwägen sein.

§ 21. Die Zahl.

Es wird zweckmäßig sein, auch hier zunächst nicht gleich in voller Allgemeinheit vorzugehen, sondern an einem Sonderfall die Untersuchung so vorzubereiten, daß nachher nur noch wenige Schritte zur allgemeinen Entwicklung nötig sind.

Daher gehen wir jetzt von dem Begriffe der „Vorstellung“ aus. Wir verstehen darunter eine unter einen Begriff gebrachte oder zu bringende Wahrnehmung. „Vorstellung“ ist also nach unserem Sprachgebrauch allemal etwas Empirisches.

Nun fordert der Begriff der besonderen Vorstellung daß sich ihr mindestens eine andere Vorstellung gegenüberstellen lasse. Wäre das nicht der Fall, so müßte die gegebene Vorstellung überhaupt die Vorstellung sein, und das widerspricht dem, daß sie eine besondere sein sollte. Hiermit steht auch die einfache tagtägliche Beobachtung in Einklang, daß jedesmal dann sich eine Fülle von Vorstellungen einstellt, wenn man versucht, eine als gesondert hervorzuheben. Das kann eben nur dadurch geschehen, daß man sie von den anderen Vorstellungen trennt.

Nun entsteht aber die Frage, wie diese Fülle von Vorstellungen eigentlich philosophisch möglich, d. h. einheitlich erfaßbar ist. Diese Fragestellung wird dadurch kompliziert, daß der Begriff der Vorstellung selbst schon ein höchst problematischer ist. Überlegen wir uns nämlich, aus welchen Bestandteilen er zusammengesetzt ist! Auf der einen Seite haben wir die Wahrnehmung, auf der anderen den Begriff. Wie ist es möglich, daß das Wahrnehmbare — das Vergängliche — mit dem Begriff — dem Bleibenden — in Übereinstimmung gebracht wird?

Man kann diese Möglichkeit überhaupt verneinen. Dann ziehe man die Folgerungen. Sie bestehen — ganz kurz und scharf gesagt — in der Unmöglichkeit empirischer Wissenschaft. — Damit dürfte dieser Einwand erledigt sein. Die empirische Wissenschaft wird sich um ihn nicht zu kümmern haben. Ihre eigene Existenz ist für sie kein

Problem, es wird nur zum Problem gemacht durch eine Metaphysik, die alles „beweisen" will. Es ist auch für uns kein Problem, ob empirische Wissenschaft existiert. Wir betrachten die Frage, unter welchen Bedingungen ihre Existenz erklärbar ist. Daher die Frage nicht lautet: ob, sondern wie die Folgerung zu vermeiden sei, die sich aus der Annahme ergibt, es sei unmöglich, Wahrnehmung unter einen Begriff zu bringen.

Gilt es nun, dieser Konsequenz auszuweichen, so muß sich irgendein „Etwas" finden lassen, das die Zusammenstellung der Wahrnehmungen unter Begriffe, das somit Vorstellungen überhaupt allererst ermöglicht. Dieses Vermittelnde ist die „Zahl", sofern sie als benannte Zahl auftritt.

Die benannte Zahl ist die notwendige Voraussetzung von Vorstellungen und somit von empirischer Wissenschaft.

Wir haben damit zum Ausdruck gebracht, daß hierdurch nicht der Zahlbegriff in seiner vollen Allgemeinheit, sondern nur in einem Sonderfalle seinen „erkenntnistheoretischen Ort" erhalten hat. Wir wollen hier gleich zur Verallgemeinerung dieser Gedanken übergehen.

Sie besteht darin, daß wir an Stelle des eingeschränkten Bereiches der Vorstellungen jede besondere Erkenntnis überhaupt betrachten.[1])

Es handelt sich nämlich hier um eine Frage, die der nach dem Begriff der Vorstellung ganz analog geht: Wie ist es möglich, daß das Besondere als Besonderes in allgemeingiltiger Weise erkannt werde? Oben wurde der Begriff der Vorstellung als Zusammensetzung eines Besonderen, Wechselnden — der Wahrnehmung — mit einem Allgemeingiltigen, Bleibenden — dem Begriff —

[1]) In meiner Dissertation *Berkeley's Philosophie der Mathematik* (Ergänzungsheft Nr. 55 der KS. — B. 1922) habe ich bei dem letzten Teil (S. 62ff.) die Zahl nur in ihrer angewandten Gestalt (und auch das nur problematisch) aufzustellen vermocht. Daher auch die dort vorgenommene Zusammenstellung mit dem Begriff „Zeit", die hier, vielen mathematischen Ansichten gleichlautend, weggefallen ist.

konstruiert. Hier fassen wir die Frage allgemein: Nicht ein Besonderes und ein Bleibendes, sondern das Besondere und das Allgemeingültige, der Gegenstand und die Methode, also die Erkenntnis im Einzelfall soll konstruiert werden.

Es ist daher die Frage, die schon oben in einer eigenen Abart — der Frage nach der Möglichkeit des wissenschaftlichen Beweises — auftauchte, hier ganz allgemein für den Gedanken jeder speziellen wissenschaftlichen Erkenntnis ausgebaut. Wir haben bereits gesehen (in § 3 des I. Kapitels), was für Konsequenzen es nach sich ziehen würde, die Möglichkeit der wissenschaftlichen Bearbeitung des Einzelfalls zu verneinen. Wir brauchen deshalb auf diesen Punkt hier nicht mehr näher einzugehen.

Dagegen ist noch eine andere Frage von Bedeutung. Es ist uns doch schon gelungen, in dem Begriff des „Anderen“ etwas zu entdecken, das den wissenschaftlichen Beweis verschiedener wissenschaftlicher Sätze ermöglicht. Können wir nicht mit diesem Begriffe auskommen? Das würde besagen, daß es genügen würde, die Möglichkeit der Gegenüberstellung eines Gedankens mit seinem Gegenteil eingesehen zu haben, um die Möglichkeit des Einreihens einer besonderen Erkenntnis überhaupt in das Ganze des Geisteslebens zu erfassen. Man kann diesem Gedanken auch folgende Gestalt geben: Läßt sich alles wissenschaftliche Systematisieren in ein dichotomisches auflösen? Ist es möglich, jedes wissenschaftliche Vorgehen so zu gestalten, daß es als ein Zerfällen in A und non-A betrachtet werden kann?

Demgegenüber ist folgender Sachverhalt festzustellen: Selbst wenn es gelänge, die gesamte Logik und Erkenntnistheorie irgendwie rein dichotomisch abzuleiten, so ist damit doch noch nicht alles an besonderen Erkenntnissen verarbeitet und zu Tage gefördert, was wir bis jetzt als solche kennen gelernt haben.

Ein Gebiet ist zum Beispiel noch vollkommen unberührt zublieben, und das ist das der benannten Zahlen und mit ihm das der gesamten empirischen Erkenntnisse. Dieses Gebiet ebenfalls der wissenschaftlichen Bearbeitung zu-

zuführen, ist nun nur mit anderen Hilfsmitteln möglich, als mit dem des „Anderen". Wir erinnern z. B. hier nur an den ganzen Apparat, den die Mengenlehre in Bewegung setzen muß, um allein den Begriff der Äquivalenz abzuleiten und damit den ersten kleinen Schritt zur Gewinnung des Bereiches der natürlichen Zahlen zu tun. Und wie klein ist dieser Schritt im Vergleich zu denen, die nötig sind, um von der natürlichen Zahl bis zu den komplexen aufzusteigen! Wir erinnern ferner an den grundlegenden Unterschied, den wir zwischen dem dualen Klassifikationsprinzip und dem DEDEKIND'schen Schnitt feststellten.

Somit ruht die Frage wieder einmal auf der Forderung der Anwendung des wissenschaftlichen Gedankens für die Empirie und auf der weiteren Forderung, eine allgemeingiltige Grundlage dieser Disziplinen zu schaffen, soweit sie irgend mit Vorstellungen arbeiten.

Diese Forderungen müssen befriedigt werden, wenn die in § 3 gesagten Folgerungen aus der Negierung der Wissenschaft vermieden werden sollen.

Demnach ist folgendes festzustellen: Es muß eine Methode geben, die es gestattet, ein schlechtweg als gesondert gegebenes und als solches zu behandelndes Etwas mit der Gesamtheit der Erkenntnis auf allgemeingültige Weise in Beziehung zu setzen.

Diese Methode nennen wir Zahl.

Es ist in diesem Satz die allgemeinste Aufstellung eines Zahlbegriffes gegeben, die wir überhaupt für möglich halten. Sie ist deswegen so allgemein, weil sie sich unmittelbar an den Begriff der Wissenschaft anschließt und keinen Zwischenraum zwischen sich und der besonderen Anwendung dieses obersten Begriffes läßt.

B. Wissenschaft der Zahlen.

§ 22. Zahlenlehre als Wissenschaft.

Hierzu sind nun noch einige Bemerkungen zu machen, die manche Mißverständnisse aus der Welt räumen werden, denen die obige Darstellung leicht ausgesetzt ist.

Der am meisten sich aufdrängende Einwand wird der sein, daß es nach dem Gesagten fast so aussieht, als solle alle wissenschaftliche Betätigung in mathematische verwandelt werden. Das ist aber, wie für jetzt nur ganz flüchtig bemerkt werde, keineswegs der Fall. Vielmehr ist die Mathematik — oder, wovon wir hier handeln, die Zahlenlehre — nur als Sonderfall der Wissenschaft aufgefaßt, wenngleich als ein recht wichtiger. Darauf etwas ausführlicher einzugehen, wird noch späterhin der geeignete Ort sein.

Ein weiterer Einwand wird der sein, der sich auf die — wie wir sagen möchten — „praktische" Seite aer Erörterung bezieht. „Ist nicht", so könnte man sagen, „dieser Zahlbegriff gänzlich ungeeignet zum faktischen Aufbau der Mathematik? Ist er nicht viel zu unsicher und schwankend, um z. B. die präzise Ableitung der Formel

$$\frac{a + a'i}{\beta + \beta' i} = \frac{a\beta + a'\beta'}{\beta^2 + \beta'^2} + \frac{a'\beta - a\beta'}{\beta^2 + \beta'^2} i \qquad ^{1)}$$

zu gestatten?"

Um diesem Einwand zu begegnen, ist darauf hinzuweisen, daß wir es nie als unsere Absicht bezeichnet haben, einen irgendwelche speziellen Schlüsse unmittelbar und allein aus sich zulassenden Zahlbegriff aufzustellen. Wir verweisen auch darauf, daß selbst in der Mathematik sich nicht unmittelbar aus dem Begriff der komplexen Zahl obenstehende Formel ergibt. Vielmehr ist dazu eine lange Reihe von einzelnen Schritten notwendig.

Und ganz analog verhält es sich auch mit dem allgemeinen Begriff der Zahl. Aus ihm ist nicht unmittelbar und ohne weiteres der Begriff selbst der natürlichen Zahl abzuleiten. Er soll vielmehr der oben (§ 19 S. 169 d. A.) gegebenen Ankündigung gemäß die Stelle anzeigen, an der der von HILBERT verwendete Terminus „Zeichen" seine neue Bedeutung erhält.

Wie sehr bei einer solche Auffassung das Wort „Zeichen" am Platze ist, ergibt sich ohne weiteres. Die

---

1) v. MANGOLDT *Einführung (69)* S. 294.

Zahlen sind uns Zeichen dafür, daß es möglich ist, gesonderte wissenschaftliche Erkenntnis zu haben. Da wir bei solcher Ansicht der Sachlage tatsächlich vollkommen am Anfang wissenschaftlicher Einzeldeduktion stehen, sind wir auch vollständig Herr über die Bezeichnungsweise und über das aus einer allgemeinen Relationstheorie herauszuschneidende Axiomsystem für die spezielle Ausprägung des Zahlbegriffes in den Sonderklassen der „Zahlen".

Wir hatten am Ende des § 18 festgestellt, daß die HILBERT'sche Grundlegung der Mathematik sich dann durchführen lassen wird, wenn man die von ihm eingeführten Zeichen als Sonderfälle eines allgemeinen Begriffes wird auffassen können. Diesen allgemeinen Begriff glauben wir gefunden zu haben.

Es ist hier nicht der Ort, dieses in allen Einzelheiten näher durchzuführen; jedoch scheint uns eine wesentliche Modifikation der spezifisch axiomatischen Entwicklungen HILBERT'S nicht notwendig zu sein, vielmehr wird alles auf Grund des von uns aufgestellten Zahlbegriffes philosophisch nur in eine einheitliche Auffassung gebracht.

Damit dürften die nächstliegenden Einwände beseitigt sein.

Wir machen hier noch eine Bemerkung über den Wissenschaftscharakter der reinen Zahlenlehre.

Wenn es möglich ist, die Zahlenlehre vermittelst der Axiomatik auf den entwickelten allgemeinen Zahlbegriff zurückzuführen, so muß dieser auch für die Art der Wissenschaftlichkeit maßgebend sein, die in der reinen Zahlenlehre vertreten wird. Dazu nun, daß es verschiedene Grade der Wissenschaftlichkeit gebe, führen die Ausführungen, die wir im letzten Paragraphen des ersten Kapitels gemacht haben. Durch die dort festgelegten Unterschiede, die sich in der Erkenntnisbestimmung aufweisen lassen, namentlich durch die Feststellung des Unterschiedes von absolut und objektiv wird die Frage aufgeworfen, zu welcher Kategorie von Erkenntnissen die mit Hilfe des allgemeinen Zahlbegriffes abgeleiteten gehören.

Nun ist festzustellen, daß zum Aufbau des Zahlbegriffes kein anderer Gedanke notwendig ist, als der der Wissenschaft und der allgemeine Begriff der Besonderheit. Denn er ist ja nichts anderes als die Methode, das Besondere in den Gedanken der Wissenschaft einzubeziehen.

Beides — Wissenschaft und Besonderes — sind aber Gedanken, die nichts Empfindbares als bedingendes Element in sich enthalten können; sie sind beide somit reine Formen unserer Erkenntnis. Danach ist auch der allgemeine Zahlbegriff als reine Form dargetan.

Nun stützt sich aber die Axiomatik bei der Entwicklung der Zahlen außer auf den allgemeinen Zahlbegriff nur noch auf logische Gesetze. Da fernerhin die Logik in irgendeinem Sinne genommen — am besten scheint uns die Definition, daß sie eine Lehre sei, deren Sätze für alle Begriffe und alle aus Begriffen ableitbaten Sätze gelten — sicher als allgemeingültige Wissenschaft anerkannt wird, so folgt hieraus die Allgemeingültigkeit der Zahlenlehre.

Das hat, im Gegensatz zu den empirischen Wissenschaftszweigen, die bedeutsame Folgerung in sich, daß kein Wandel ihrer Resultate möglich ist. Die Zahlenlehre kann wohl ausgebaut, nicht aber erschüttert werden, wenn es gelingt, den noch fehlenden Ring in der Kette der logischen Schlüsse zu schmieden, nämlich den Beweis der Widerspruchslosigkeit der HILBERT'schen Axiome.

Wir wiederholen, was wir schon früher einmal gesagt haben: „Wesentlich von den Erfolgen, die der Axiomatik beschieden sein werden, wird es abhängen, wann und wie sich Philosophie und Mathematik begegnen."

§ 23. Die Zahlenlehre im Verhältnis zu anderen Disziplinen.

Jetzt aber scheint wirklich die schon oben angedeutete Frage unausweichlich bejaht werden zu müssen, ob denn alle Wissenschaft durch die Angabe des allgemeinen Zahlbegriffes „mathematisiert" werde?

In der Tat hat diese Behauptung insofern Recht, als nach unseren Untersuchungen selbstverständlich jede Erkenntnis, wenn sie in ihrer Eigenschaft als eine für sich bestehende betrachtet wird, durch die Hände der Mathematik gegangen, irgendwie „gezählt" sein muß. Damit ist aber auch die allgemeine Bedeutung des Zahlbegriffes erschöpft. Wer aus dem Zugegebenen schließen wollte, daß nun alle Wissenschaft Mathematik sei, der würde den Fehler begehen, den Gegenstand der Untersuchung mit der Methode zu verwechseln. Wohl können auch wieder die Methoden als Gegenstände der Untersuchung genommen werden, und insofern das geschieht, sind sie als abhängig von dem Zahlbegriff zu betrachten; aber auch nur insofern sie besondere Objekte der Untersuchung abgeben. Ihr Inhalt als Methode wird dadurch nicht im geringsten beeinträchtigt.

Es scheint hier angebracht, darauf hinzuweisen, daß auch in der von uns oben (S. 182 d. A.) gegebenen Auffassung die Logik Gegenstand und Methode ihrer Untersuchung gleichsetzen kann. Denn beides sind allgemeine Begriffserörterungen. Der Unterschied von der zahlenmäßigen Betrachtung ist dadurch klargestellt. Er besteht darin, daß, logisch betrachtet, eine Erkenntnis nur ihrer begrifflichen Struktur nach Interesse bietet. Es wird nur das behandelt, was an ihr als Einheit ihrer bleibenden Bestimmungen erkannt werden kann. Hierüber verbreitet sich die Logik in allgemeinen Sätzen, die selbst wieder begriffliche Konstruktionen sind. Die zahlenmäßige Betrachtung dagegen interessiert sich für eine Erkenntnis eben nur, insofern sie sie als gesonderte Erkenntnis ansehen kann. Auf ihren Inhalt geht sie gar nicht, oder nur insoweit ein, als sich die Sonderung als solche aus ihm erkennen läßt. Zu diesem letzteren gehören ihre eigenen Schlüsse, die dadurch sich selber unterworfen werden.

Aber selbst, wenn wir diese auf eine besondere Auffassung der Logik sich stützenden Gedanken beiseite lassen, so läßt sich doch nachweisen, daß es, abgesehen

vom Zahlbegriff, auch noch andere methodische Hilfs mittel zur Durchführung der Aufgabe der Wissenschaft geben muß.

Wir gehen hierbei, um die Sachlage möglichst anschaulich darzustellen, von einer schon früher ausdrücklich anerkannten Annahme aus. Es ist dies die Annahme empirischer Wissenschaftszweige. Wir setzen hier aber noch mehr voraus, nämlich daß diese Wissenschaftsgebiete voneinander *inhaltlich verschieden* sind. Um die Existenz dieser Gebilde *erkenntnistheoretisch* zu rechtfertigen, ist es notwendig, sich der Existenz gewisser allgemeiner Methoden zu versichern, die imstande sind, den empfindbaren Stoff der Untersuchung zu einem wissenschaftlich gerechtfertigten Inhalt einer Erkenntnis zu machen.

Und nun müssen diese Methoden wieder in ein systematisches Gefüge gebracht werden, das mit dem Ganzen der Erkenntnis in Einklang zu setzen ist. So erscheinen auf diesem Wege eine Reihe ebenfalls *reiner Formen*, die *ihrem Inhalt nach* unabhängig vom Zahlbegriff sein müssen. Sonst könnte es nur *eine* empirische Wissenschaft geben, die angewandte Mathematik; und alle Bemühungen, eine von der angewandten Mathematik *inhaltlich verschiedene reine Naturwissenschaft* zu konstruieren, wären ebenso vergeblich, wie es dann auch das Suchen nach einem *allgemeingültigen Gesetze für das menschliche Wollen* wäre. Es gäbe keine Psychologie und keine Geschichte, keine Medizin und keine Nationalökonomie.

Man darf hier nicht etwa an eine Appellation an das „Faktum der Wissenschaft" denken. Ob eine solche durchgebildete Wissenschaft schon *tatsächlich* besteht, kommt für unsere Untersuchungen nicht in Frage; einzig und allein *das* ist wesentlich, wohin eine Verneinung der empirischen Disziplinen führt. Es läßt sich nun hier nicht mit aller Ausführlichkeit dartun, in welche Unannehmlichkeiten man sich verwickelt, wenn man das Leugnen dieser Wissenschaftsgebiete konsequent durchführen würde. Jedenfalls ist aber sehr wahrscheinlich, daß sie ähnlicher Natur sind,

wie die, welchen man sich beim Leugnen der Wissenschaft überhaupt aussetzt.

Auf alle Fälle ist aber das Eine durchaus sicher, daß es noch andere Methoden geben kann, selbst wenn man den absoluten Charakter der Zahlenlehre anerkennt. Der Unterschied dieser Betrachtungsweisen von denen der Zahlenlehre besteht eben darin, daß die ersteren alle auf den besonderen Inhalt der durch die Empirie gebotenen Erkenntnismöglichkeiten Bezug nehmen. Die zahlenmäßige Erwägung aber weiß von einem solchen Inhalt nichts, ihr genügt es, die Besonderheit feststellen zu können; was sonst noch an Erkenntnismöglichkeiten sich ergeben könnte, ist ihr uninteressant.

In diesen Erwägungen ist der Unterschied und doch wieder das dominierende Verhältnis der Zahlenlehre gegenüber anderen Wissenszweigen zur Geltung gebracht.

§ 24. Schlußbetrachtung.

Auf dieses letzte einzugehen, sei uns noch in einer Schlußbetrachtung gestattet.

Wir haben immer und immer wieder auf die Bedeutung des Begriffes „Wissenschaft“ nicht für das gesamte Denken allein, sondern auch für die Möglichkeit, unsere Sonderfrage zu lösen, hingewiesen. Wir sind nicht müde geworden, immer und immer wieder auf diesen systematischen Ausgangspunkt zurückzukommen; wir haben uns bemüht, unsere allgemeinen Beweise stets und ständig auf ihn zu beziehen. Wir hoffen, dadurch eine gewisse Geschlossenheit in die grundlegende Darlegung des ersten Kapitels gebracht zu haben.

Das konnten wir noch dadurch steigern, daß sich auch bei den letzten Erörterungen des zweiten Kapitels der Gedanke der Wissenschaft als ein höchst wichtiger erwies, nachdem wir vorher längere Zeit in spezielleren Untersuchungen ihn nicht in seiner Allgemeinheit hatten auftauchen sehen.

Nun hat es sich in diesem abschließenden Kapitel als nötig erwiesen, den allgemeinen Zahlbegriff mit dem der Wissenschaft wiederholt in engste Beziehung zu setzen.

Dadurch ist der Kreislauf geschlossen, insofern als die Bedeutung des allgemeinen Zahlbegriffes für die Erwägungen, die wir im ersten Paragraphen als historische Einleitung benutzten, zutage gefördert ist. Denn durch den engen Zusammenhang, den unser Zahlbegriff mit dem Ganzen der Erkenntnis erhalten hat, ist trotz aller „Krisen" der Mathematik das stolze Wort nicht unberechtigt:

Der Zahlbegriff, in seiner Allgemeinheit, ist kulturnotwendig.

Register.





Druck von
C. Schulze & Co., G. m. b. H
Gräfenhainichen

